

Diplomarbeit

Innere Modelle in der Topostheorie

angefertigt am
Mathematischen Institut

vorgelegt der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Februar 2006

von

Philipp Hieronymi

aus

Bonn

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1. Einleitung	3
Kapitel 2. Kategorientheoretische Grundlagen	11
1. Unterobjekte	15
2. Heyting-Algebren in einem Topos	25
3. Quantoren in einem Topos	35
4. Interne Quantoren	42
Kapitel 3. Topostheoretische Modelle der Mengenlehre	45
1. Logik und Modelle in einem Topos	45
2. Lokale Mengenlehre	49
3. Von-Neumann-Hierarchie in einem Topos	51
4. Natürlichkeit des Modells	54
5. Ableitungsregeln	60
6. Die ZF-Axiome	64
7. Der $(-, -)$ -Morphismus	69
Kapitel 4. Innere Topoi	77
1. Unterobjekte der von-Neumann-Hierarchie	77
2. Bilder und Graph eines Morphismus und deren Σ_0 -Formeln	79
3. Definition Innerer Topoi	85
4. Limiten in $V_{\mathcal{M}}$	89
5. Unterobjektklassifizierer und Potenzobjekte in $V_{\mathcal{M}}$	93
Kapitel 5. Ausblick	103
Literaturverzeichnis	109
Index	111

Einleitung

Die Topostheorie entstand in den 60er Jahren des vorherigen Jahrhunderts zuerst als Verallgemeinerung des Begriffes eines topologischen Raumes und später als Axiomatisierung der Kategorie der Mengen. Der zweite Ansatz, ausgearbeitet von Bill Lawvere, ist der Ausgangspunkt dieser Diplomarbeit. Ein Topos ist nach dieser Definition eine Kategorie, die alle endlichen Limiten, einen Unterobjektklassifizierer und Potenzobjekte besitzt. Es stellt sich heraus, dass diese kategoriellen Begriffe stark genug sind, um in einem Topos typisierte Logik zu betreiben. Dies wird in Kapitel 2 ausführlich besprochen. Ferner gibt es in einem Topos lokale \in -Relationen. Um jedoch Mengenlehre in einem Topos zu betreiben, benötigt man eine globale \in -Relation und die Möglichkeit, nicht nur typisierte Quantoren, sondern auch unbeschränkte Quantoren zu interpretieren. Im Jahre 1980 bewies M. Fourman in [F80], dass in ZFC jeder vollständige, lokal kleine Topos tatsächlich wieder ein intuitionistisches Mengenlehremodell liefert. Fourman führt dafür in einem Topos die Konstruktion der von-Neumann-Hierarchie durch und globalisiert daran die \in -Relation. Ferner definiert er, dass eine Formel gültig ist, wenn sie an jeder Stufe dieser Hierarchie gültig ist. Diese Konstruktion wird in Kapitel 3 besprochen. Die Zusammenhänge zwischen Forcing, booleschen Modellen der Mengenlehre und Topoi ist inzwischen wohlbekannt und finden sich in [MM92], Kapitel 6, [F80], Theorem 4.1, und in [BS89]. Eine andere Konstruktion der Mengenlehre hat in diesem Zusammenhang jedoch weniger Beachtung gefunden: die Theorie der Inneren Modelle. In Kapitel 4 untersuchen wir daher eine mögliche Definition eines Inneren Topos. Die Idee der Definition folgt direkt aus der Fourman-Konstruktion: Man betrachte nicht die gesamte von-Neumann-Hierarchie, sondern an jeder Stufe nur einen bestimmten Teil. Wir werden daher den Begriff einer Unterhierarchie definieren. Schließlich werden wir ein Kriterium beweisen, wann die Kategorie der Unterobjekte einer Unterhierarchie ein Topos ist. Eine der Eigenschaften davon wird die aus der Theorie der Inneren Modelle bekannte Σ_0 -Abgeschlossenheit sein. Es wird sich zeigen, dass der Beweis der Vollständigkeit eines Inneren Topos nicht ohne weiteres funktioniert. Wir werden dies und die Absolutheit zwischen der Logik im Ausgangs- und im Inneren Topos im letzten Abschnitt des vierten Kapitel untersuchen.

Wie schon erwähnt, teilt sich die Arbeit in drei Teile. Kapitel 2 legt die kategoriellen Grundlagen. Wir werden dort definieren, was die schon erwähnten Begriffe eines Unterobjektklassifizierers und eines Potenzobjekt bedeuten. Ferner zeigen wir in Theorem 2.35, dass man diese Potenzobjekte als Heyting-Algebren interpretieren kann. Dies ist der Ausgangspunkt kategorieller Logik. Schließlich werden wir ebenfalls in diesem Kapitel erklären, wie Quantoren in dieser Logik zu interpretieren sind. Um möglichst wenig Ergebnisse der Kategorientheorie zu benutzen, beweisen

wir hier nur Spezialfälle einiger Aussagen der Topostheorie. Eine allgemeinere Version des Kapitel 2 findet sich zum Beispiel in [J02], Kapitel A.1, oder in [MM92], Kapitel 4.

Kapitel 3 ist eine ausgearbeitete Version von [F80]. Wir werden dort beschreiben, wie man sowohl lokal als auch global \in -Relationen in einem Topos interpretiert. Insbesondere erklären wir dort die Konstruktion der von-Neumann-Hierarchie und wie man dort ein Modell der Mengenlehre konstruiert. Abschnitt 3.7, der nicht mehr auf [F80] basiert, bereitet auf Kapitel 4 vor und beweist mit Satz 3.38, dass Produkte von zwei Unterobjekten der von-Neumann-Hierarchie wieder Unterobjekte der von-Neumann-Hierarchie sind.

In Kapitel 4 wenden wir uns nun dem Hauptthema dieser Arbeit zu, dem Zusammenhang zwischen Inneren Modelle und der Topostheorie. Grundidee dieser Arbeit war, zu überlegen, ob es eine zur Theorie der Inneren Modelle vergleichbare Konstruktion in der Topostheorie gibt. Ein Ziel war zum Beispiel die Konstruktion eines Topos, der ein Modell für $V = L$ ist. Unser Ansatz wird hier für die Definition von Unterhierarchien der von-Neumann-Hierarchie in einem Topos sein. Wir werden dann versuchen, an jeder Stufe der Hierarchie nur 'Elemente' zuzulassen, die gerade unsere gewünschten Eigenschaften besitzen. Da das Mengenlehremodell eines Topos direkt mit der Konstruktion der von-Neumann-Hierarchie in einem Topos verknüpft ist, scheint dies die einzige Möglichkeit, kontrolliert neue Topoi mit gewünschten mengentheoretischen Eigenschaft zu konstruieren. In Kapitel 4 werden wir daher für eine Hierarchie \mathcal{M} mit gewissen weiteren Eigenschaften eine Kategorie $V_{\mathcal{M}}$ definieren. Ergebnis von Kapitel 4 wird dann folgendes Theorem sein:

THEOREM 1.1. *Sei \mathcal{M} eine Unterhierarchie, die abgeschlossen unter Produkten, Σ_0 -Formeln und Exponentiation ist, und liege ferner $Id : 1 \rightarrow 1$ und $Id : \Omega \rightarrow \Omega$ in \mathcal{M} , dann ist $V_{\mathcal{M}}$ ein Topos.*

Die Kategorientheorie gilt als die Theorie universeller Eigenschaften. Wohlbekannt sind die universellen Eigenschaften von binären Produkten und disjunkten Vereinigungen. Aber nicht nur diese Konstruktionen, sondern auch die Potenzmenge einer Menge und die Menge $\{0, 1\}$ erfüllen universelle Eigenschaften. Seien zwei Mengen A, B gegeben mit $A \subset B$. Die universelle Eigenschaft von $\{0, 1\}$ ist nun gerade die Existenz der charakteristischen Abbildung von A $\chi_A : B \rightarrow \{0, 1\}$ mit $f(x) = 1$ genau dann, wenn $x \in A$. In kategorieller Terminologie ist die gleichbedeutend mit folgender Aussage: für alle Mengen A, B mit $A \subset B$ gibt es genau eine Abbildung $\chi_A : B \rightarrow \{0, 1\}$, sodass

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \{1\} \\ \downarrow & & \downarrow \top \\ B & \xrightarrow{\chi_A} & \{0, 1\} \end{array}$$

ein Pullback-Quadrat ist, wobei $\top : \{1\} \rightarrow \{0, 1\}$ die 1 gerade auf die 1 abbildet. In Abschnitt 2.1 werden wir einen Unterobjektklassifizierer in einer Kategorie gerade durch diese Eigenschaft von $\{0, 1\}$ definieren.

Sei nun eine Menge M gegeben und $P(M)$ die Potenzmenge von M . Ferner sei \in

die Abbildung

$$\begin{aligned} \in: M \times P(M) &\rightarrow \{0, 1\} \\ (m, A) &\mapsto \begin{cases} 1, & m \in A \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Die universelle Eigenschaft von $P(M)$ ist nun folgende: Für jede weitere Menge N und jede Abbildung $f: M \times N \rightarrow \{0, 1\}$ erhalten wir genau eine Abbildung $g: N \rightarrow P(M)$, nämlich

$$\begin{aligned} g: N &\rightarrow P(M) \\ n &\mapsto \{m \in M \mid f(m, n) = 1\}, \end{aligned}$$

so dass

$$\begin{array}{ccc} M \times N & & \\ \text{Id}_M \times g \downarrow & \searrow f & \\ M \times P(M) & \xrightarrow{\in} & \{0, 1\} \end{array}$$

kommutiert. Wiederum in Kapitel 2.1 werden wir diese Eigenschaft zur Definition eines Potenzobjektes eines Objektes einer Kategorie nutzen. Hier werden schon die Zusammenhänge zwischen den ZF-Axiomen und der Definition von Potenzobjekten deutlich: die Eindeutigkeit der Abbildung g garantiert 'lokale' Extensionalität. Seien A_1, A_2 zwei Teilmengen von M und $g_1, g_2: \{1\} \rightarrow P(M)$, die Abbildung $1 \mapsto A_1$ bzw. $1 \mapsto A_2$. Falls nun A_1 und A_2 dieselbe Elemente enthalten, gilt $\in \circ (\text{Id}_M \times g_1) = \in \circ (\text{Id}_M \times g_2)$. Aus der obigen Eindeutigkeit der Abbildung g , folgt nun $g_1 = g_2$ und so die Gleichheit von A_1 und A_2 .

Aufgrund solcher Zusammenhänge verwundert es nun kaum, dass wir nun aus einem gegebenen vollständigen und lokal kleinen Topos ein Modell der Mengenlehre konstruieren können. Zuerst müssen wir aber wie im Fall der booleschen Modelle der Mengenlehre in [B77] erklären, wie wir Formeln in unserem Modell interpretieren wollen. In Fall von [B77] werden Formeln ein Wahrheitswert in einer booleschen Algebra zugeordnet. Die bekanntesten booleschen Algebren sind $\{0, 1\}$ und alle Potenzmengen. In Abschnitt 2.2 werden wir nun sehen, dass in einem beliebigen Topos der Unterobjektklassifizierer und die Potenzobjekte Heyting-Algebren liefern. Um genau zu sein: In einem Topos \mathcal{E} mit einem Unterobjektklassifizierer Ω bilden für jedes Objekt A die Morphismen $\text{Hom}_{\mathcal{E}}(A, \Omega)$ eine Heyting-Algebra. Ferner definieren wir für zwei Objekte A, B in Abschnitt 2.3 die Abbildungen

$$\begin{aligned} \exists_A &: \text{Hom}_{\mathcal{E}}(A \times B, \Omega) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{E}}(B, \Omega), \\ \forall_A &: \text{Hom}_{\mathcal{E}}(A \times B, \Omega) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{E}}(B, \Omega). \end{aligned}$$

In Abschnitt 3.1 werden wir dann hiermit die Interpretation typisierter Formeln induktiv definieren. Zum Beispiel sei eine Formel $\varphi(x, y)$ gegeben, wobei x von der Sorte s und y von der Sorte t sei. Ferner sei die Sorte s durch ein Objekt A im Topos \mathcal{E} und die Sorte t durch ein Objekt B im Topos \mathcal{E} interpretiert. Wir interpretieren dann $\varphi(x, y)$ als Morphismus $\llbracket \varphi(x, y) \rrbracket_{A, B}: A \times B \rightarrow \Omega$ in \mathcal{E} . Induktiv werden wir dann zum Beispiel $\exists_s x \varphi(x, y)$ als Bild von $\llbracket \varphi(x, y) \rrbracket_{A, B}$ unter \exists_A interpretieren, also als Morphismus $\exists_A(\llbracket \varphi(x, y) \rrbracket_{A, B}): B \rightarrow \Omega$. Man beachte, dass die Formeln extern im Mengenuniversum, wie in [K96] Kapitel 14, syntaktisch definiert sind

und nur in unserem Topos interpretiert werden.

Bisher können wir nur typisierte Formeln in einem Topos interpretieren. Um allerdings die Interpretation beliebiger \in -Formeln zu definieren, müssen wir in der Lage sein, auch unbeschränkte Quantoren und nicht-typisierte \in -Relationen in einem Topos zu definieren. Die folgende Konstruktion ist nicht möglich in jedem Topos. Der betrachtete Topos muss nun lokal klein sein und alle Limiten besitzen. Die letztere Eigenschaft nennen wir auch Vollständigkeit. In [MM92] Chapter 6 wird gezeigt, dass in einem nicht notwendigerweise vollständigen Topos immer noch beschränkte ZF-Axiome gelten. Vgl. auch Abschnitt 3.2. Der Übergang zum vollständigen Topos erlaubt uns daher, diese Beschränkung aufzuheben. Ferner ermöglicht er uns die Konstruktion von nicht-endlichen Limiten, wie zum Beispiel den natürlichen Zahlen \mathbb{N} . Eine Beispiel für einen nicht-vollständigen Topos ist der Topos der endlichen Mengen. Diese Kategorie enthält als Objekte alle endlichen Mengen und als Morphismen die mengentheoretischen Abbildung zwischen die Objekten. Dieser Kategorie fehlt zum Beispiel \mathbb{N} als Limes.

Sei unser Topos \mathcal{E} nun also lokal klein und vollständig. Sei ferner A ein Objekt im Topos \mathcal{E} . Nach Definition eines Topos gibt es nun ein Potenzobjekt Ω^A von A in \mathcal{E} zusammen mit einem Morphismus $ev_A : A \times \Omega^A \rightarrow \Omega$. Nun können wir $x \in y$, wobei die Sorte von x durch A und die Sorte von y durch Ω^A interpretiert sei, durch ev_A interpretieren. Wie oben schon angedeutet, hat diese lokale Interpretation der \in -Relation schon Eigenschaften wie Extensionalität. Dies wird ausführlich in Abschnitt 3.2 behandelt. Dort werden wir zeigen, dass lokal einige beschränkte ZF-Axiome gelten. Dies wird insbesondere beim Beweis der ZF-Axiome im Mengenlehremodell von größtem Nutzen sein. Es bleibt nun also, die typisierten Quantoren und die lokalen \in -Relationen zu 'globalisieren'. Basierend auf [F80] geschieht dies in Abschnitt 3.3. Dafür wird in einem gegebenen Topos \mathcal{E} die von-Neumann-Hierarchie nachgebaut. Man startet mit dem initialen Objekt $0_{\mathcal{E}}$ in \mathcal{E} . Wie bei der klassischen Konstruktion der von-Neumann-Hierarchie bildet man nun induktiv die Potenzobjekte und nimmt an Limesstellen die Vereinigung. Mit anderen Worten:

$$\begin{aligned} V_0 &:= 0_{\mathcal{E}}, \\ V_{\alpha+1} &:= \Omega^{V_{\alpha}}, \\ V_{\lambda} &:= \lim_{\alpha < \lambda} V_{\alpha}, \text{ falls } \lim(\lambda). \end{aligned}$$

Im Gegensatz zum klassischen Fall sind die Einbettung einer Stufe der Hierarchie in eine andere und die Struktur der \in -Relation nicht trivialerweise gegeben. Daher müssen wir diese simultan mit der Konstruktion der Hierarchie induktiv definieren. In Abschnitt 3.3 werden wir also durch transfinite Induktion für jede Ordinalzahl α folgendes konstruieren:

- ein Objekt V_{α} in \mathcal{E} ,
- einen Morphismus $\in_{\alpha} : V_{\alpha} \times V_{\alpha} \rightarrow \Omega$ und
- für jede Ordinalzahl $\beta < \alpha$ einen Monomorphismus $i_{\beta}^{\alpha} : V_{\beta} \rightarrow V_{\alpha}$,

sodass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
 V_\alpha \times V_\alpha & & \\
 \downarrow Id \times i_\alpha^{\alpha+1} & \searrow \in_\alpha & \\
 V_\alpha \times V_{\alpha+1} & \xrightarrow{ev_{V_\alpha}} & \Omega \\
 \downarrow i_\alpha^{\alpha+1} \times Id & \nearrow \in_{\alpha+1} & \\
 V_{\alpha+1} \times V_{\alpha+1} & &
 \end{array}$$

Das obere der beiden kommutativen Dreiecke fordert im klassischen mengentheoretischen Fall gerade, dass ein Element aus Stufe α mit dem Element aus Stufe $\alpha + 1$ identifiziert wird, welches die gleichen Elemente besitzt. Das untere Dreieck erzwingt im klassischen Fall, dass ein Element aus Stufe $\alpha + 1$ gerade die Bilder von jenen Elemente aus Stufe α enthält, die es nach der lokalen \in -Relation enthalten würde. An dieser Stelle sei nochmal explizit bemerkt, dass Objekte in einem Topos keine Elemente mehr enthalten. Wir können hier nur eine \in -Relation als Morphisms von einem Produkt von zwei Objekten in den Unterobjektklassifizierer Ω definieren. Wirkliche Elemente haben die Objekte deswegen allerdings nicht. Man beachte ferner, dass die hier genutzten Ordinalzahlen nicht intern im Topos, sondern extern durch ZFC gegeben sind.

Die Konstruktion der von-Neumann-Hierarchie in einem Topos ermöglicht uns dann die Interpretation von unbeschränkten Quantoren in Abschnitt 3.2. Ferner werden wir die Gültigkeit von einer \in -Formel dort als Gültigkeit an allen Stufen definieren. In Abschnitt 3.3 und 3.4 werden wir dann mit relativ großen technischen Aufwand zeigen, dass die Regeln prädikativer Ableitung in unserem Modell gelten. In Abschnitt 3.5 folgt der Beweis der intuitionistischen ZF-Axiomen in diesem Modell.

In Kapitel 4 kommen wir nun zum Zusammenhang zwischen Inneren Modellen und der Topostheorie. Ziel dieses Kapitel ist die Suche nach einer Möglichkeit, einen gegebenen Topos so zu verkleinern, dass in dem nach Kapitel 3 konstruierten Modell der Mengenlehre des kleineren Topos gewisse Aussagen wahr sind. Da die von-Neumann-Hierarchie so grundlegend für die Konstruktion dieses Modells ist, ist die Idee der Verkleinerung der von-Neumann-Hierarchie naheliegend. In Kapitel 4 definieren wir daher eine Unterhierarchie als Kollektion von Unterobjekten $(m_\alpha : M_\alpha \hookrightarrow V_\alpha)_{\alpha \in On}$, die gewisse Eigenschaften erfüllt. Wir nehmen also an jeder Stufe der von-Neumann-Hierarchie ein Stück heraus. Für jede solche Unterhierarchie \mathcal{M} werden wir dann in Abschnitt 4.3 eine Kategorie $V_{\mathcal{M}}$ definieren. Objekte werden dabei (Äquivalenzklassen von) Monomorphismen nach Stufen der von-Neumann-Hierarchie sein, die durch ein gewisses m_β der Unterhierarchie faktorisieren. Also sind dies Objekte der Art $m : A \hookrightarrow V_\alpha$ modulo einer Äquivalenzrelation. Morphismen zwischen diesen Objekten sind dann Äquivalenzklassen von Morphismen zwischen Domäne von Repräsentanten, deren Graph durch ein gewisses m_β der Unterhierarchie faktorisiert. Also für zwei Objekte $m : A \hookrightarrow V_\alpha$ und $n : B \hookrightarrow V_\beta$ ist ein Morphismus zwischen m und n ein Morphismus $f : A \rightarrow B$,

so dass dessen Graph wieder ein Objekt der Kategorie ist. Der Graph eines Morphismus f wird dabei als Verknüpfung von $(Id, f) : A \hookrightarrow A \times B$ und dem in Abschnitt 3.7 definierten Morphismus $(-, -)_{A,B} : A \times B \hookrightarrow V_\gamma$ definiert. Fordert man nun die Abgeschlossenheit einer Unterhierarchie unter Produkten und Σ_0 -Formeln, erhält man, dass $V_{\mathcal{M}}$ tatsächlich eine Kategorie ist. Abgeschlossenheit bzgl. Produkten bedeutet hier, dass für zwei Objekte von $V_{\mathcal{M}}$, sagen wir $m : A \hookrightarrow V_\alpha$ und $n : B \hookrightarrow V_\beta$, das Produkt $(-, -)_{A,B} : A \times B \hookrightarrow V_\gamma$ wieder ein Objekt von $V_{\mathcal{M}}$ ist. Ferner nennen wir eine Unterhierarchie \mathcal{M} abgeschlossen bzgl. Exponentiation, falls für jeden Morphismus $f : A \times B \rightarrow \Omega$ in $V_{\mathcal{M}}$ das Bild der Transponierten von f ein Objekt von $V_{\mathcal{M}}$ ist. Diese beiden Abgeschlossenheitsforderungen kann man als Gegenstück zur klassischen Forderung der Quasi-Universalität an Innere Modelle verstehen. Diese ermöglichen uns, in Kapitel 4 aus größeren Objekten mittels der Σ_0 -Abgeschlossenheit gewünschte Objekte zu konstruieren. Daher erhalten wir nach einigem technischen Aufwand in den Abschnitten 4.4 und 4.5, dass $V_{\mathcal{M}}$ tatsächlich ein Topos ist, falls die Unterhierarchie ebenfalls unter Exponentiation abgeschlossen ist. Dies ist gerade die Aussage des obigen Theorems 1.1.

Um jedoch im Topos $V_{\mathcal{M}}$ ein Modell der Mengenlehre zu konstruieren, müssen wir fordern, dass $V_{\mathcal{M}}$ alle Limiten enthält und lokal klein ist. In Kapitel 5 werden wir diese Problematik diskutieren. Es stellt sich zwar heraus, dass $V_{\mathcal{M}}$ lokal klein ist, aber sicherlich nicht generell alle beliebige Limiten enthält. Dies gilt schon nicht im Fall klassischer Innerer Modelle. Offen bleibt die Frage, in welchen Fällen die Konstruktion der von-Neumann-Hierarchie trotzdem möglich wäre. Unter der Annahme, dass nun die Konstruktion der von-Neumann-Hierarchie in $V_{\mathcal{M}}$ möglich sei, untersuchen wir abschließend in Kapitel 5 die Absolutheit bezüglich Σ_0 -Formeln zwischen dem Ausgangstopos und dem inneren Topos $V_{\mathcal{M}}$. Da wir nicht genau wissen, wie man beliebige Limiten in $V_{\mathcal{M}}$ konstruiert, wissen wir nicht genau, wie sich die Limesstufen im inneren Topos im Verhältnis zu den Limesstufen im Ausgangstopos verhalten. Allerdings ist es möglich, unter zwei Annahmen zu beweisen, dass die Interpretation von Σ_0 -Formeln absolut ist.

In der Mengenlehre ist es oft so, dass man versucht, ohne jede höhere Struktur zu arbeiten. Man bearbeitet Probleme, die meist kombinatorischer Art sind, und Objekte, die zwar kombinatorisch sehr komplex sind, aber keinen höheren Grad an Struktur im Sinne von Linearität und ähnlichem aufweisen. Darüber hinaus ist jedes Objekt in der Mengenlehre explizit gegeben. Zum Beispiel wird das Produkt zweier Mengen in der Mengenlehre explizit angegeben, während es in der Kategorietheorie nur durch eine universelle Eigenschaft bis auf Isomorphie bestimmt ist. In der Mengenlehre kann man die Objekte also tatsächlich festhalten, anstatt nur über ihre universellen Eigenschaften zu sprechen.

Diese Diplomarbeit ist ein Versuch, ein Konzept aus der Mengenlehre auf die Kategorientheorie zu übertragen. Es verwundert daher nicht, dass dies zum Teil möglich ist, aber mit einem sehr großen technischen Aufwand. So benötigen wir fast die ganzen Kapitel 2 und 3 dieser Arbeit, um ein ZF-Modell aus einem Topos zu konstruieren. Auch bei der Konstruktion der Inneren Topoi wird deutlich, dass wir selbst für einfache Resultate viel Arbeit leisten müssen. Der Grund für die viele Arbeit ist der zunehmende Grad an Komplexität. Man könnte diesen Vorgang

wie folgt zusammenfassen: zuerst abstrahieren wir durch eine Definition die Konstruktionen der Mengenlehre. Anschließend konstruieren wir aus diesen wieder ein Modell der Mengenlehre, um gerade die Eigenschaften, die wir abstrahieren wollten, in diesem Modell zu beweisen. Ein solcher Vorgang erhöht natürlich zwangsweise die Komplexität der betrachteten Objekte. Erschwerend kommt die eben erwähnte Tatsache hinzu, dass Kategorientheorie weniger explizit ist als Mengenlehre.

Die entscheidende Frage ist natürlich, ob sich dieser höhere Grad an Komplexität lohnt. Die Konstruktion eines ZF-Modelles in einem vollständigen, lokal kleinen Topos ist sicherlich ein interessantes Ergebnis. Es ermöglicht neue Beweise für die Unabhängigkeit der Kontinuumshypothese und des Auswahlaxioms. Vgl. [BS89] und [MM92] Chapter 6. Da die Logik in einem Topos generell intuitionistisch ist, ermöglicht uns dieses Resultat auch die Konstruktion von intuitionistischen ZF-Modellen. Vgl. auch [MM92] Chapter 6. Zum Beweis neuer klassischer Unabhängigkeitsresultate scheint diese Konstruktion jedoch wenig geeignet zu sein, da diese Konstruktion noch weit weniger explizit ist als die Konstruktion boolescher Modelle der Mengenlehre. Und selbst boolesche Modelle der Mengenlehre werden heute nur sehr selten genutzt, um tatsächlich neue Unabhängigkeitsresultate zu finden. Stattdessen wird der explizitere Weg des Forcings über partielle Halbordnung genutzt.

Ähnliches gilt nun auch für unsere Konstruktion der Inneren Topoi. Abgesehen davon, dass es nicht gelang, ein Modell der Mengenlehre in unserem Inneren Topos zu konstruieren, steht der technische Aufwand in keinem Verhältnis zum Nutzen. Die Möglichkeit der Konstruktion mag von theoretischem Interesse sein, doch eine praktische Anwendung zum Beispiel in Form neuer Unabhängigkeitsbeweise scheint nicht möglich zu sein. Es scheint keinen Grund zu geben, dass der Weg über Innere Topoi einen Vorteil gegenüber dem klassischen Weg hätte. Abschließend lässt sich also festhalten, dass die Kategorietheorie ihre Stärke in der Topologie, der algebraischen Geometrie und benachbarten Bereichen der Mathematik hat, aber für Fragestellung der klassischen Mengenlehre ungeeignet ist. Kategorientheorie funktioniert hervorragend, wenn man stärker Morphismen betrachtet als eigentliche Elemente, wird aber technisch viel zu aufwendig, wenn Elemente und Enthaltensein-Beziehung im Mittelpunkt stehen.

Wie erwähnt, beinhalten Kapitel 2 und 3 bereits bekannte Resultate. Wir werden für alle bis auf zwei Ausnahmen auch die Beweise dieser Resultate angeben. Dagegen wird zu einem das Theorem 2.22, welches besagt, dass ein Topos genügend Colimiten besitzt, nur zitiert. Vgl. [MM92] Corollary IV.5.4. Zum anderen beweisen wir ebenfalls nicht das Yoneda-Lemma, welches zum Beispiel in [M71] III.2 zu finden ist. Diesen beiden Resultate sind nicht schwer zu beweisen, benötigen aber deutlich mehr kategorielle Grundlage, als wir hier legen wollen. Insgesamt gelingt es uns so mit einem Minimum an Kategorientheorie zu arbeiten. Nach dem Yoneda-Lemma sind Objekte, die durch eine universelle Eigenschaft bestimmt sind, durch die Eigenschaft bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Für zwei Objekte A, B einer Kategorie ist deren Produkt also auch nur bis auf Isomorphie bestimmt. Wie in fast allen Texten über Kategorientheorie, werden wir trotzdem oft von dem Produkt zweier Objekte sprechen. Viele unserer Konstruktionen können durchgeführt

werden mit jedem Objekt aus einer dieser Isomorphieklassen und unterscheiden sich nicht, wenn wir einen anderen Repräsentanten wählen. Zum Beispiel bei der Konstruktion der von-Neumann-Hierarchie in einem Topos nehmen wir ein initiales Objekt $0_{\mathcal{E}}$ und einen Unterobjektklassifizierer Ω . Ferner nehmen wir an jeder Stufe ein Potenzobjekt. Am resultierenden Modell ändern sich aufgrund der Isomorphie natürlich nichts, wenn wir jeweils ein andere initiales Objekt, einen anderen Unterobjektklassifizierer oder ein anderes Potenzobjekt wählen. Wir werden daher, wie in der Kategorientheorie üblich, nicht jedesmal explizit zu sagen, dass wir einen Repräsentanten wählen.

Ferner sei erwähnt, dass wir hier in ZFC arbeiten. Wir werden nicht versuchen, ein neues Axiomensystem mittels topostheoretischer Ideen aufzustellen, sondern konstruieren für einen in unserem Mengenuniversum gegebenen Topos ein Modell der Mengenlehre. Insbesondere sind die Ordinalzahlen, die wir ab Kapitel 3 benutzen, nicht in diesem Topos, sondern in unserem Mengenuniversum.

Abschließend möchte ich mich bei Prof. Koepke bedanken. Zum einen dafür, dass er mir ermöglicht hat, mich in das Thema Topostheorie einzuarbeiten, und zum anderen für die viele Unterstützung und die herzliche Aufnahme in seine Arbeitsgruppe während der gesamten Zeit meiner Diplomarbeit.

Besonderer Dank gebührt natürlich meinen Eltern, nicht nur für ihre wunderbare und unerschöpfliche Unterstützung.

Kategorientheoretische Grundlagen

DEFINITION 2.1. Eine Kategorie \mathcal{C} ist ein 6-Tupel $(ob(\mathcal{C}), mor(\mathcal{C}), dom, cod, Id, \circ)$, wobei $ob(\mathcal{C}), mor(\mathcal{C})$ zwei Klassen und $dom, cod : mor(\mathcal{C}) \rightarrow ob(\mathcal{C}), Id : ob(\mathcal{C}) \rightarrow mor(\mathcal{C})$ drei Abbildungen sind und \circ eine partielle Abbildung $\circ : mor(\mathcal{C}) \times mor(\mathcal{C}) \rightarrow mor(\mathcal{C})$ ist, so dass

- (i) für alle $A \in ob(\mathcal{C})$: $dom(Id(A)) = A = cod(Id(A))$.
- (ii) für alle $f \in mor(\mathcal{C})$: $f \circ Id(dom(f)) = f = Id(cod(f)) \circ f$.
- (iii) für alle $f, g \in mor(\mathcal{C})$: $f \circ g$ ist genau dann definiert, wenn $cod(g) = dom(f)$.
- (iv) für alle $f, g \in mor(\mathcal{C})$: Falls $f \circ g$ definiert ist, dann ist auch $cod(f \circ g) = cod(f)$ und $dom(f \circ g) = dom(g)$.
- (v) für alle $f, g, h \in mor(\mathcal{C})$: Falls $f \circ g$ und $g \circ h$ definiert sind, dann ist auch $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ definiert.

Wir sagen, dass Elemente von $ob(\mathcal{C})$ Objekte von \mathcal{C} sind und dass Elemente von $mor(\mathcal{C})$ Morphismen von \mathcal{C} sind. Wir werden $f : A \rightarrow B$ für einen Morphismus \mathcal{C} mit $dom(f) = A$ und $cod(f) = B$ schreiben und nennen einen solchen Morphismus einen Morphismus zwischen A und B . Weiterhin bezeichnen wir die Klassen von Morphismen zwischen zwei Objekten A und B mit $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$. Falls die Klasse für alle Objekte eine Menge ist, nennen wir die Kategorie lokal klein. Sei im folgenden \mathcal{C} ein beliebige Kategorie.

DEFINITION 2.2. Ein Objekt $1 \in ob(\mathcal{C})$ heißt terminal, falls für alle $A \in ob(\mathcal{C})$ es genau einen Morphismus in \mathcal{C} von A nach 1 gibt; es also genau einen Morphismus gibt, der dieses Diagramm

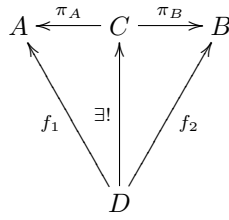
$$A \xrightarrow{\exists!} 1$$

kommutativ macht.

Für jedes Objekt A bezeichnen wir diesen Morphismus mit $!_A$. Man beachte, dass für jeden Morphismus $f : B \rightarrow A$ $!_A \circ f = !_B$ gilt, da es nur einen Morphismus von B nach 1 gibt.

DEFINITION 2.3. Seien wieder $A, B \in ob(\mathcal{C})$ zwei Objekte, dann heißt ein Objekt $C \in ob(\mathcal{C})$ zusammen mit zwei Morphismen $\pi_A : C \rightarrow A$ und $\pi_B : C \rightarrow B$ Produkt von A und B , falls es für alle $D \in ob(\mathcal{C})$ und für alle $f_1 : D \rightarrow A$ und $f_2 : D \rightarrow B$ genau einen Morphismus $f : A \rightarrow C$ mit $\pi_A \circ f = f_1$ und $\pi_B \circ f = f_2$ gibt; es also genau einen Morphismus gibt, der folgendes Diagramm kommutativ

macht:

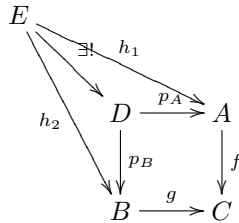


Wie üblich nutzen wir folgende Notation: Wir schreiben $A \times B$ für das Produkt von A und B . Wir nennen π_A bzw. π_B die Projektion von $A \times B$ nach A bzw. B . Für zwei Morphismen $f_1 : D \rightarrow A$ und $f_2 : D \rightarrow B$ schreiben wir (f_1, f_2) für den induzierten Morphismus von D nach $A \times B$. Für zwei Morphismen $g_1 : D \rightarrow A$ und $g_2 : E \rightarrow B$ schreiben wir $g_1 \times g_2$ für den induzierten Morphismus von $D \times E$ nach $A \times B$. Ferner für einen gegebenen Morphismus $e : E \rightarrow A \times B$, sei $e_A = \pi_A \circ e$ und $e_B = \pi_B \circ e$. Dann ist natürlich in unserer Notation $e = (e_A, e_B)$.

DEFINITION 2.4. Seien $A, B \in \text{ob}(\mathcal{C})$ zwei Objekte und $f, g : A \rightarrow B$ zwei Morphismen, dann heisst ein Objekt $E \in \text{ob}(\mathcal{C})$ und ein Morphismus $m : E \rightarrow A$ Equalizer von f und g , falls für alle $D \in \text{ob}(\mathcal{C})$ und $h : D \rightarrow A$ mit $f \circ h = g \circ h$ gilt, dass es genau einen Morphismus $h' : D \rightarrow E$ mit $m \circ h' = h$ gibt.

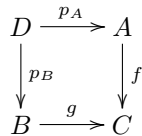
Wir sagen, dass eine Kategorie \mathcal{C} alle endliche Limiten hat, falls sie alle Equalizer, alle Produkte und ein terminales Element besitzt. Man beachte, dass nach dem Yoneda-Lemma alle Limiten bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt sind. Siehe [M71] III.2. Es ist ferner nicht schwer zu sehen, dass dann diese Kategorie tatsächlich alle möglichen endliche Limiten besitzt. Siehe hierzu [M71] Corollary V.2.1. Einen wichtigen Limes wollen wir hier allerdings noch genau betrachten:

DEFINITION 2.5. Seien drei Objekte $A, B, C \in \text{ob}(\mathcal{C})$ und zwei Morphismen $f : A \rightarrow C$, $g : B \rightarrow C$ gegeben. Ein Objekt D zusammen mit zwei Morphismen $p_A : D \rightarrow A$ und $p_B : D \rightarrow B$ heisst Pullback von f und g , falls $f \circ p_A = g \circ p_B$ gilt und für alle $E \in \text{ob}(\mathcal{C})$ und es für alle Morphismen $h_1 : E \rightarrow A$ und $h_2 : E \rightarrow B$ mit $f \circ h_1 = g \circ h_2$ genau einen Morphismus $h : E \rightarrow D$ mit $p_A \circ h = h_1$ und $p_B \circ h = h_2$ gibt; es existiert also genau ein Morphismus der folgendes Diagramm



kommutativ macht.

Ein Diagramm der Form



nennen wir Pullback-Quadrat, falls D zusammen mit p_A und p_B der Pullback von f und g ist.

Betrachten wir nun eine Kategorie mit endlichen Limiten. Seien nun zwei Morphismen $f : A \rightarrow C$ und $g : B \rightarrow C$ gegeben. Dann gibt es zwei Morphismen $f \circ \pi_A$ und $g \circ \pi_B$ von $A \times B$ nach C , wobei $\pi_A : A \times B \rightarrow A$ und $\pi_B : A \times B \rightarrow B$ gerade die entsprechenden Projektionen sind. Sei nun $e : E \rightarrow A \times B$ der Equalizer dieser beiden Morphismen.

(1) Das folgende Diagramm ist ein Pullback-Quadrat:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{e_A} & A \\ \downarrow e_B & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{g} & C \end{array}$$

Beweis: Zuerst zeigen wir, dass das obige Diagramm kommutiert. Da e der Equalizer von $f \circ \pi_A$ und $g \circ \pi_B$ ist, gilt

$$\begin{aligned} f \circ e_A &= f \circ \pi_A \circ e \\ &= g \circ \pi_B \circ e \\ &= g \circ e_B. \end{aligned}$$

Seien nun zwei Morphismen $h_1 : D \rightarrow A$ und $h_2 : D \rightarrow B$ gegeben mit $f \circ h_1 = g \circ h_2$. Sei ferner $h : D \rightarrow A \times B$ der induzierte Morphismus, also $h = (h_1, h_2)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f \circ \pi_A \circ h &= f \circ h_1 \\ &= g \circ h_2 \\ &= g \circ \pi_B \circ h. \end{aligned}$$

Es gibt daher genau einen Morphismus $k : D \rightarrow E$ mit $e \circ k = h$. Also gilt $e_A \circ k = h_1$ und $e_B \circ k = h_2$. Damit ist k der gesuchte Morphismus. Dieser ist eindeutig bestimmt, da für alle Morphismen $k' : D \rightarrow E$ mit $e_A \circ k' = h_1$ und $e_B \circ k' = h_2$, ebenfalls $e \circ k' = h$ gilt. Aber wie eben erwähnt, ist k der einzige Morphismus mit dieser Eigenschaft.

□(1)

Wir haben hier also gesehen, dass tatsächlich jede Kategorie mit allen endlichen Limiten auch alle Pullbacks besitzt. Ferner sagen wir das eine Kategorie \mathcal{C} alle Limiten besitzt, falls sie alle endliche Limiten und ferner Produkte aller Familien von Objekten besitzt:

DEFINITION 2.6. Für jedes $i \in I$ sei $A_i \in \text{ob}(\mathcal{C})$ ein Objekt, dann heißt ein Objekt $C \in \text{ob}(\mathcal{C})$ zusammen mit einer Familie von Morphismen $(\pi_i)_{i \in I}$ mit $\pi_i : C \rightarrow A_i$ Produkt von $(A_i)_{i \in I}$, falls es für alle $D \in \text{ob}(\mathcal{C})$ und für alle Familien von Morphismen $(f_i)_{i \in I}$ mit $f_i : D \rightarrow A_i$ genau einen Morphismus $f : D \rightarrow C$ mit $\pi_i \circ f = f_i$ gibt.

Wir schreiben natürlich $\prod_{i \in I} A_i$ für dieses Produkt.

Neben Limiten gibt es auch Colimiten. Diese erhält man, wenn man in den obigen Diagrammen alle Pfeile umdreht. Der Vollständigkeit halber geben wir die genauen Definition noch einmal explizit an.

DEFINITION 2.7. Ein Objekt $0 \in \text{ob}(\mathcal{C})$ heißt initial, falls für alle $A \in \text{ob}(\mathcal{C})$ es genau einen Morphismus in \mathcal{C} von 0 nach A gibt. Wir nennen dieses Objekt ferner strikt initial, falls jeder Morphismus $f : A \rightarrow 0$ ein Isomorphismus ist.

DEFINITION 2.8. Seien wieder $A, B \in \text{ob}(\mathcal{C})$ zwei Objekte, dann heißt ein Objekt $C \in \text{ob}(\mathcal{C})$ zusammen mit zwei Morphismen $\nu_A : A \rightarrow C$ und $\nu_B : B \rightarrow C$ disjunkte Vereinigung von A und B , falls es für alle $D \in \text{ob}(\mathcal{C})$ und für alle $f_1 : A \rightarrow D$ und $f_2 : B \rightarrow D$ genau einen Morphismus $f : C \rightarrow D$ gibt, mit $f \circ \nu_A = f_1$ und $f \circ \nu_B = f_2$ gibt.

Wir schreiben für die disjunkte Vereinigung oft $A \cup B$. Ferner schreiben wir wie im Fall von Produkten (f_1, f_2) für den induzierten Morphismus. Falls vier Objekte A, B, C, D und zwei Morphismen $f : A \rightarrow B$ und $g : C \rightarrow D$ gegeben sind, schreiben wir $f \cup g$ für den induzierten Morphismus von $A \cup C$ nach $B \cup D$.

DEFINITION 2.9. Seien $A, B \in \text{ob}(\mathcal{C})$ zwei Objekte und $f, g : A \rightarrow B$ zwei Morphismen. Ein Objekt $E \in \text{ob}(\mathcal{C})$ und ein Morphismus $m : B \rightarrow E$ heißen Coequalizer von f und g , falls für alle $D \in \text{ob}(\mathcal{C})$ und $h : B \rightarrow D$ mit $h \circ f = h \circ g$ gilt, dass es genau einen Morphismus $h' : E \rightarrow D$ mit $h' \circ m = h$ gibt.

Wie oben sagen wir, dass ein Kategorie \mathcal{E} alle endlichen Colimiten besitzt, falls sie ein initiales Objekt, disjunkte Vereinigungen und Coequalizer besitzt. Wie bei den Limiten kann man leicht zeigen, dass \mathcal{E} dann tatsächlich alle endlichen Colimiten besitzt. Ferner erhalten wir wie im Fall von Limiten und Pullbacks, dass in einer Kategorie, die alle Colimiten besitzt, auch alle Pushouts existieren. Zum Abschluß dieses Abschnittes definieren wir also den Begriff eines Pushouts:

DEFINITION 2.10. Seien drei Objekte $A, B, C \in \text{ob}(\mathcal{C})$ und zwei Morphismen $f : C \rightarrow A$, $g : C \rightarrow B$ gegeben. Ein Objekt D zusammen mit zwei Morphismen $\nu_A : A \rightarrow D$ und $\nu_B : B \rightarrow D$ heißt Pushout von f und g , falls $\nu_A \circ f = \nu_B \circ g$ gilt und für alle $E \in \text{ob}(\mathcal{C})$ und für alle Morphismen $h_1 : A \rightarrow E$ und $h_2 : B \rightarrow E$ mit $h_1 \circ f = h_2 \circ g$ es genau einen Morphismus $h : D \rightarrow E$ gibt, mit $h \circ \nu_A = h_1$ und $h \circ \nu_B = h_2$ gibt.

Auch wie oben sagen wir, dass eine Kategorie alle Colimiten besitzt, falls es alle endliche Colimiten und weiter disjunkte Vereinigung beliebiger Familien von Objekten besitzt. Die disjunkte Vereinigung beliebiger Familien von Objekten ist natürlich folgendes:

DEFINITION 2.11. Für $i \in I$ sei $A_i \in \text{ob}(\mathcal{C})$ ein Objekt, dann heißt ein Objekt $C \in \text{ob}(\mathcal{C})$ zusammen mit einer Familie von Morphismen $(\nu_i)_{i \in I}$, mit $\nu_i : A_i \rightarrow C$, disjunkte Vereinigung von $(A_i)_{i \in I}$, falls es für alle $D \in \text{ob}(\mathcal{C})$ und für alle Familien von Morphismen $(f_i)_{i \in I}$ mit $f_i : A_i \rightarrow D$ genau einen Morphismus $f : C \rightarrow D$ mit $f \circ \nu_i = f_i$ gibt.

Wir nennen eine Kategorie vollständig, falls sie alle Limiten und Colimiten besitzt. Wir werden bei der Konstruktion der von-Neumann-Hierarchie in einem Topos insbesondere folgende Colimes benötigen. Sei λ eine Limesordinalzahl und A_α ein Objekt in \mathcal{C} für jede Ordinalzahl $\alpha < \lambda$. Ferner sei für zwei Ordinalzahlen α, β mit $\alpha < \beta < \lambda$ ein Morphismus $i_\alpha^\beta : A_\alpha \rightarrow A_\beta$ gegeben. Es gelte ferner für $\alpha < \beta < \gamma < \lambda$, dass $i_\alpha^\gamma = i_\beta^\gamma \circ i_\alpha^\beta$.

$$A_0 \xrightarrow{i_0^1} A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_\beta \xrightarrow{i_\beta^{\beta+1}} A_{\beta+1} \rightarrow \dots,$$

Sei nun ein Objekt C zusammen mit einer Familie von Morphismen $(i_\alpha : A_\alpha \rightarrow C)_{\alpha < \lambda}$ mit folgender Eigenschaft gegeben:

$$(0.1) \quad i_\beta \circ i_\alpha^\beta = i_\alpha, \quad \text{für alle } \alpha < \beta < \lambda.$$

$C, (i_\alpha : A_\alpha \rightarrow C)_{\alpha < \lambda}$ ist dann der Colimes dieses Diagrammes, falls es für alle Objekte D und Familien von Morphismen $(d_\alpha : A_\alpha \rightarrow D)_{\alpha < \lambda}$ mit Eigenschaft (0.1) genau einen Morphismus $f : C \rightarrow D$ gibt, der folgende Gleichung erfüllt:

$$f \circ i_\alpha = d_\alpha, \quad \text{für alle } \alpha < \lambda.$$

1. Unterobjekte

Die Topostheorie wurde entwickelt als Axiomatisierung der Kategorie aller Mengen. Wir beginnen nun damit für Begriffe wie Teilmenge, Injektivität und Surjektivität ein kategorielles Gegenstück zu definieren.

DEFINITION 2.12. Seien $A, B \in \text{ob}(\mathcal{C})$ Objekte und $f : A \rightarrow B$ ein Morphismus zwischen diesen, dann sagen wir

- (i) f ist ein Monomorphismus, falls für alle $E \in \text{ob}(\mathcal{C})$ und alle $g, h : E \rightarrow A$ gilt: Falls $f \circ g = f \circ h$, dann $g = h$.
- (ii) f ist ein Epimorphismus, falls für alle $E \in \text{ob}(\mathcal{C})$ und alle $g, h : B \rightarrow E$ gilt: Falls $g \circ f = h \circ f$, dann $g = h$.
- (iii) f ist ein Isomorphismus, falls es einen Morphismus $g : B \rightarrow A$ gibt mit $g \circ f = \text{Id}_A$ und $f \circ g = \text{Id}_B$.

Wir schreiben, wenn ein $f : A \rightarrow B$ ein Monomorphismus ist, $f : A \hookrightarrow B$. Falls f ein Isomorphismus ist, schreiben wir $f : A \xrightarrow{\sim} B$. Sei nun $g : B \rightarrow A$ ein weiterer Morphismus. Ferner gelte, dass $g \circ f = \text{Id}_A$. Dann ist offensichtlich, dass g ein Epimorphismus und f ein Monomorphismus ist. Man beachte, dass nicht in jeder Kategorie jeder Monomorphismus ein Links- und nicht jeder Epimorphismus ein Rechtsinverses besitzt. Siehe zum Beispiel die Kategorie der Ringe und Ringmorphismen und die Einbettung von \mathbb{Z} nach \mathbb{Q} . Wir beweisen nun zwei nützliche Resultate über den Zusammenhang zwischen Limiten und Monomorphismen.

LEMMA 2.13. Sei $e : E \rightarrow A$ der Equalizer zweier Morphismen, $f, g : A \rightarrow B$, dann ist e ein Monomorphismus.

Beweis: Gegeben seien zwei Morphismen $h, k : D \rightarrow E$ mit $e \circ h = e \circ k$. Dann gilt aber auch $f \circ e \circ h = g \circ e \circ h$. Also gibt es genau einen Morphismus $l : D \rightarrow E$ mit $e \circ l = e \circ h$. Aufgrund der Eindeutigkeit von l gilt, also $l = h = k$. Damit ist e ein Monomorphismus. □

LEMMA 2.14. Seien $f : A \rightarrow C, g : B \rightarrow C, m : P \rightarrow B$ und $n : P \rightarrow A$ vier Morphismen, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{m} & B \\ \downarrow n & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

ein Pullback-Quadrat ist. Falls f ein Monomorphismus, dann ist auch m ein Monomorphismus.

Beweis: Seien also zwei weitere Morphismen $h, k : D \rightarrow P$ mit $m \circ h = m \circ k$ gegeben. Dann gilt natürlich auch, dass $g \circ m \circ h = g \circ m \circ k$ und nach Kommutativität des obigen Diagrammes auch $f \circ n \circ h = f \circ n \circ k$. Falls f nun ein Monomorphismus ist, gilt $n \circ h = n \circ k$. Weil P aber der Pullback von f und g ist, gilt dann $h = k$, da es nur einen Morphismen mit der Eigenschaft $n \circ h = n \circ k$ und $m \circ h = m \circ k$ gibt. \square

Wir beweisen nun noch ein weiteres Resultat über den Zusammenhang zwischen Epimorphismen und Colimiten.

LEMMA 2.15. Sei $f : A \rightarrow B$ ein Morphismus. f ist ein Epimorphismus genau dann, wenn

$$\begin{array}{ccc} B & \xleftarrow{\text{Id}_B} & B \\ \text{Id}_B \uparrow & & \uparrow f \\ B & \xleftarrow{f} & A \end{array}$$

ein Pushout-Quadrat ist.

Beweis: Angenommen, dass f ein Epimorphismus ist. Wir müssen nun zeigen, dass das obige Diagramm ein Pushout-Quadrat ist. Offensichtlich ist es kommutativ. Seien also ferner zwei Morphismen $g : D \rightarrow B$ und $h : D \rightarrow B$ gegeben mit $f \circ h = f \circ g$. Da f ein Epimorphismus ist, folgt also $h = g$. Also ist g der gesuchte Morphismus mit $\text{Id}_B \circ g = g = \text{Id}_B \circ h$. Offensichtlich ist er auch eindeutig bestimmt. Also ist das obige Diagramm ein Pushout-Quadrat.

Sei umgekehrt, dass obige Diagramm ein Pushout-Quadrat. Ferner seien $g : D \rightarrow B$ und $h : D \rightarrow B$ gegeben mit $f \circ h = f \circ g$. Dann gibt es genau einen Morphismus $k : D \rightarrow B$ mit $\text{Id}_B \circ g = k = \text{Id}_B \circ h$. Also gilt $k = g = h$. Damit gilt, dass f ein Epimorphismus ist. \square

Es ist wohl bekannt, dass in der Kategorie der Mengen die Mono-, Epi- und Isomorphismen gerade die injektiven, surjektiven und bijektiven Abbildungen sind. Betrachten wir nun den Begriff der Teilmenge. Aus der Mengenlehre wissen wir, dass es für eine Menge M und Teilmenge N von M eine Einbettung $N \hookrightarrow M$ gibt. Um genau zu sein: dies ist natürlich die Identität auf M eingeschränkt auf N . Dies bedeutet, dass wir jede Teilmenge von M als Bild eines Monomorphismus nach M betrachten können. Es liegt also nahe den Begriff der Teilmenge auf Monomorphismen nach M zu verallgemeinern. Um nicht zu viele verallgemeinerte Teilmenge zu erhalten ist aber sinnvoll, zwei verallgemeinerte Teilmenge für gleich zu erklären, wenn ihr Bild gleich ist.

Vor dem Hintergrund dieser Überlegungen definieren wir den Begriff eines Unterobjekt in der Kategorie \mathcal{C} : Sei nun B eine Objekt in der Kategorie \mathcal{C} und seien zwei Monomorphismen nach B , $m : A \hookrightarrow B$ und $n : C \hookrightarrow B$, gegeben. Wir sagen m und n sind äquivalent, falls es einen Isomorphismus $f : A \xrightarrow{\sim} C$ gibt, so dass

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & C \\ & \searrow m & \swarrow n \\ & & B \end{array}$$

kommutiert. Dies ist offensichtlich eine Äquivalenzrelation. Ein Unterobjekt von B wird als eine Äquivalenzklasse unter dieser Relation definiert. Wie üblich werden wir im folgenden oft die Notation missbrauchen und einen Monomorphismus Unterobjekt nennen, obwohl wir eigentlich dessen Äquivalenzklasse unter der obigen Äquivalenzrelation meinen.

Betrachten wir wieder den mengentheoretischen Fall: Seien A und B zwei Mengen und $A \subset B$, dann gibt es eine charakteristische Abbildung $\chi_A : B \rightarrow \{0, 1\}$, so dass $\chi_A(x) = 1$ genau dann gilt, wenn $x \in A$. Dies bedeutet gerade, dass

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow & & \downarrow \top \\ B & \xrightarrow{\chi_A} & \{0, 1\} \end{array}$$

ein Pullback-Quadrat ist, wobei $\top : 1 \rightarrow \{0, 1\}$ die 1 gerade auf die 1 abbildet. Warum ist dies ein Pullback-Quadrat? Sei eine Abbildung $f : C \rightarrow B$ gegeben mit $\chi_A \circ f = \top \circ !_D$, dann liegt das Bild von f ja gerade in A und so gibt es offensichtlich eine eindeutig bestimmte Abbildung $f' : C \rightarrow A$, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & & A \\ & \nearrow f' & \downarrow \\ C & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

kommutiert. Nämlich gerade die Einschränkung von f auf die A . Vor diesem Hintergrund definieren wir nun:

DEFINITION 2.16. Wir sagen ein Objekt $\Omega \in ob(\mathcal{C})$ und ein Morphismus $\mathbf{true} : 1 \rightarrow \Omega$ sind der Unterobjektklassifizierer von \mathcal{C} , falls für alle $B \in ob(\mathcal{C})$ und alle Monomorphismen $m : A \hookrightarrow B$ genau ein Morphismus $f : B \rightarrow \Omega$ existiert, so dass

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow m & & \downarrow \mathbf{true} \\ B & \xrightarrow{f} & \Omega \end{array}$$

ein Pullback-Quadrat ist. Wir nennen f den charakteristischen Morphismus von m .

Wir schreiben \mathbf{true}_A für $\mathbf{true} \circ !_A$. Nach der Definition eines Unterobjektklassifizierers wissen wir, dass es für jeden Monomorphismen $m : D \hookrightarrow A$ genau einen charakteristischen Morphismus $l : A \rightarrow \Omega$. Sei nun $n : E \hookrightarrow A$ äquivalent zu m und sei $k : A \rightarrow \Omega$ der charakteristische Morphismus von n . Sei ferner $\iota : E \rightarrow D$ der Isomorphismus zwischen m und n .

(1) Das folgende Diagramm ist ein Pullback-Quadrat:

$$\begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow m & & \downarrow \mathbf{true} \\ A & \xrightarrow{k} & \Omega \end{array}$$

Beweis: Nach Definition von ι gilt $m = n \circ \iota$. Daher gilt:

$$\begin{aligned} k \circ m &= k \circ n \circ \iota \\ &= \mathbf{true} \circ !_E \circ \iota \\ &= \mathbf{true} \circ !_D. \end{aligned}$$

Also kommutiert das obige Diagramm.

Seien nun zwei Morphismen $f : T \rightarrow A$ und $g : T \rightarrow 1$ gegeben mit $k \circ f = \mathbf{true} \circ g$. Nach Definition von des terminales Objektes, ist dann g gerade $!_T$ und $\mathbf{true} \circ g = \mathbf{true}_T$. Dann gibt es nach Definition von k genau einen Morphismus $f' : T \rightarrow E$ mit $n \circ f' = f$. Dann ist $\iota \circ f'$ ein Morphismus mit $m \circ \iota \circ f' = f$ und $!_D \circ \iota \circ f' = !_T = g$.

Sei nun $f'' : T \rightarrow D$ ein weiterer Morphismus mit $m \circ f'' = f$ und $!_D \circ f'' = g$. Da gilt offensichtlich $m \circ f'' = m \circ \iota \circ f'$. Da m ein Monomorphismus ist, gilt dann $\iota \circ f' = f''$. Also ist das obige Diagramm ein Pullback-Quadrat.

□(1)

Damit hat also auch jedes Unterobjekt genau einen charakteristischen Morphismus. Ferner gilt also nach (1), dass wir eine Bijektion zwischen den Unterobjekten von A und $\text{Hom}_E(A, \Omega)$ haben. Wir wollen im nächsten Abschnitt diesen Zusammenhang genauer betrachten. In folgenden werden wir oft zu zeigen haben, dass Diagramme der Form

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow m & & \downarrow \mathbf{true} \\ A & \xrightarrow{f} & \Omega \end{array}$$

Pullback-Quadrat sind, wobei m ein Monomorphismus ist. Es reicht, dann zu zeigen, dass dieses Diagramm kommutiert und dass es für jeden Morphismus $g : D \rightarrow A$ mit $f \circ g = \mathbf{true}_D$ einen Morphismus $h : D \rightarrow B$ mit $m \circ h = f$ gibt. Dann gilt nämlich auch $!_D = !_B \circ h$. Ferner ist h eindeutig bestimmt durch die Eigenschaft $m \circ h = f$, da m ein Monomorphismus ist.

Nach Lemma 2.14 wissen wir bereits, dass Pullback Monomorphismen erhalten. Dies erlaubt uns eine weitere Notation der Mengenlehre in die Kategorientheorie zu übertragen: das Urbild. Sei $m : E \hookrightarrow B$ ein Unterobjekt von B und $f : A \rightarrow B$ ein Morphismus, dann definieren wir $f^*(m)$ als den Morphismus nach A , so dass

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f^*(m)} & A \\ \downarrow & & \downarrow f \\ E & \xrightarrow{m} & B \end{array}$$

ein Pullback-Quadrat ist. Nach Lemma 2.14 ist dies tatsächlich wieder ein Monomorphismus. Das zu gehörige Unterobjekt ist dann $f^*(m)$ das Urbild von m unter f . Dies ist offensichtlich wohl definiert.

SATZ 2.17. Sei $f : A \rightarrow B$ ein Morphismus, $s : S \hookrightarrow B$ ein Unterobjekt von B und $g : B \rightarrow \Omega$ sein charakteristischer Morphismus, dann ist $g \circ f$ der charakteristische Morphismus von $f^*(s)$.

Beweis: Zuerst bemerken wir, dass das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
P & \longrightarrow & S & \longrightarrow & 1 \\
f^*(s) \downarrow & & \downarrow s & & \downarrow \mathbf{true} \\
A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & \Omega
\end{array}$$

aus zwei Pullback-Quadraten besteht. Daher kommutiert jedes Quadrat für sich und damit auch das äussere Rechteck. Sei nun ein Morphismus $d : D \rightarrow A$ mit $g \circ f \circ d = \mathbf{true}_D$ gegeben. Dann gilt natürlich auch $g \circ (f \circ d) = \mathbf{true}_D$. Da aber das rechte Quadrat ein Pullback-Quadrat ist, existiert genau ein Morphismus $h' : D \rightarrow S$ mit $s \circ h' = f \circ d$. Weil aber auch das linke Quadrat ein Pullback-Quadrat ist, existiert genau ein Morphismus $h'' : D \rightarrow P$ mit $f^*(s) \circ h'' = h'$. Damit ist auch das äussere Rechteck ein Pullback-Quadrat. \square

Betrachten wir nun einen speziellen Fall des Urbildes: sei $\pi_B : A \times B \rightarrow B$ die Projektion von $A \times B$ nach B . Ferner sei $s : S \hookrightarrow B$ ein Unterobjekt von B . Wir wollen nun $\pi_B^*(s)$ ausrechnen.

(2) Das folgende Diagramm ist ein Pullback-Quadrat:

$$\begin{array}{ccc}
A \times S & \xrightarrow{Id_A \times s} & A \times B \\
\downarrow \pi_S & & \downarrow \pi_B \\
S & \xrightarrow{s} & B
\end{array}$$

Beweis: Da $\pi_B \circ (Id_A \times s) = s \circ \pi_S$ gilt, kommutiert das obige Diagramm. Seien nun zwei Morphismen $f_1 : D \rightarrow S$ und $f_2 = (g_1, g_2) : D \rightarrow A \times B$ mit $s \circ f_1 = \pi_B \circ f_2$ gegeben. Damit gilt $s \circ f_1 = g_2$. Ferner erfüllt (g_1, f_1) die Eigenschaft des gesuchten Morphismus:

$$(Id_A \times s) \circ (g_1, f_1) = (g_1, g_2) = f_2$$

und

$$\pi_S \circ (g_1, f_1) = f_1.$$

Sei $h = (h_1, h_2) : D \rightarrow A \times S$ ein weiterer Morphismus mit $(Id_A \times s) \circ h = f_2$ und $\pi_S \circ h = f_1$. Dann gilt, dass $h_1 = g_1$ und $h_2 = f_1$. Damit ist das obige Diagramm ein Pullback-Quadrat. $\square(2)$

Damit gilt also nach (2), dass $\pi_B^*(s)$ gerade $(Id_A \times s) : A \times S \hookrightarrow A \times B$ ist.

Wende wir uns nun der Potenzmenge zu: Sei M eine Menge und $P(M)$ ihre Potenzmenge, dann gibt es eine Abbildung

$$\begin{aligned}
\in : M \times P(M) &\rightarrow \{0, 1\} \\
(m, A) &\mapsto \begin{cases} 1, & m \in A \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

Wenn wir nun ein weitere Menge N und eine Abbildung $f : M \times N \rightarrow \{0, 1\}$ gegeben haben, erhalten wir auch eine Abbildung $g : N \rightarrow P(M)$:

$$\begin{aligned} g : N &\rightarrow P(M) \\ n &\mapsto \{m \in M \mid f(m, n) = 1\}. \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt dann, dass

$$\begin{array}{ccc} M \times N & & \\ \text{Id}_M \times g \downarrow & \searrow f & \\ M \times P(M) & \xrightarrow{\in} & \{0, 1\} \end{array}$$

kommutiert. Mit diesem Gedanken definieren wir nun Potenzobjekte:

DEFINITION 2.18. Sei $A \in \text{ob}(\mathcal{C})$, dann sagen wir, dass $\Omega^A \in \text{ob}(\mathcal{C})$ und $ev_A : A \times \Omega^A \rightarrow \Omega$ das Potenzobjekt von A bilden, falls es für jedes Objekt $D \in \text{ob}(\mathcal{C})$ und jeden Morphismus $f : A \times D \rightarrow \Omega$ genau einen Morphismus $\bar{f} : D \rightarrow \Omega^A$ gibt, so dass

$$\begin{array}{ccc} A \times D & & \\ \text{Id}_A \times \bar{f} \downarrow & \searrow f & \\ A \times \Omega^A & \xrightarrow{ev_A} & \Omega \end{array}$$

kommutiert.

Wir nennen \bar{f} auch die Transponierte von f . Die Bildung der Transponierten ist in folgender Weise natürlich: seien $f : A \times D \rightarrow \Omega$ und $g : C \rightarrow D$ zwei Morphismen, dann gilt

$$\begin{aligned} ev_A \circ (\text{Id} \times \bar{f} \circ g) &= ev_A \circ (\text{Id}_A \times \bar{f}) \circ (\text{Id}_A \times g) \\ &= f \circ (\text{Id}_A \times g). \end{aligned}$$

Daher gilt nach Definition der Transponierten, dass die Transponierte von $f \circ (\text{Id}_A \times g)$ gerade $\bar{f} \circ g$ ist. Nun können wir endlich den Begriff eines Topos definieren.

DEFINITION 2.19. Eine Kategorie \mathcal{C} ist ein Topos, falls sie alle endliche Limiten, einen Unterobjektklassifizierer und für alle Objekte jeweils ein Potenzobjekt besitzt.

Beispiele von Topoi gibt es viele. Das Standard-Beispiel ist natürlich die Kategorie der Mengen **Set** mit Abbildungen als Morphismen. Wie schon erwähnt ist natürlich auch die Kategorie der endlichen Mengen **Set_{fin}** mit Abbildungen als Morphismen ein Topos. Andere Beispiele sind folgende Funktorkategorien: für eine beliebige Kategorie \mathcal{C} ist die Kategorie der Funktoren **Set^C** von \mathcal{C} nach **Set** mit natürlichen Transformationen ein Topos. Dies ist sogar ein Topos, der alle Limiten besitzt. Für weitere Ausführung siehe [MM92] Chapter 1. Für die Definition von Funktoren und natürlichen Transformationen siehe [M71] I.3, I.4. Ein weiteres wichtiges Beispiel von Topoi sind die Grothendieck-Topoi. Dies sind gewisse Unterkategorien der Funktorkategorien **Set^C** für beliebige Kategorien \mathcal{C} . Sei zum Beispiel X ein topologischer Raum und $\text{Off}(X)$ die Kategorie der offenen Mengen auf X . Dann ist **Set^{Off(X)^{op}}** die Kategorie der mengenwertigen Prägarben auf X . Die Unterkategorie der mengenwertigen Garben auf X ist dann ein Beispiel für einen Grothendieck-Topos. Für genauere Ausführungen und den Beweis, dass es sich bei den obigen Beispielen wirklich um Topoi handelt, siehe [MM92] Chapter

2, 3 und [J02] A.1.

Nach dem Yoneda-Lemma ist bekannt, dass die Konstruktionen wie Produkte und disjunkte Vereinigungen durch ihre universellen Eigenschaften bis auf Isomorphie genau bestimmt sind. Daher folgt ebenfalls direkt aus dem Yoneda-Lemma das Potenzobjekte und Unterobjektklassifizierer eindeutig bis auf Isomorphie bestimmt sind. Sei nun im folgenden \mathcal{E} ein Topos. Ferner sei immer Ω ein Unterobjektklassifizierer von \mathcal{E} und Ω^A ein Potenzobjekt eines Objektes A von \mathcal{E} . Als erstes zeigen wir nun, dass der Unterobjektklassifizierer und alle Potenzobjekte in einem Topos injektive Objekte sind:

SATZ 2.20. Seien $A, B \in ob(\mathcal{E})$ zwei Objekte, $m : A \hookrightarrow B$ ein Monomorphismus und $f : A \rightarrow \Omega$ ein Morphismus, dann existiert ein Morphismus $g : B \rightarrow \Omega$, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{m} & B \\ & \searrow f & \downarrow g \\ & & \Omega \end{array}$$

kommutiert.

Beweis: Sei nun $s : S \rightarrow A$ das Unterobjekt, dessen charakteristischer Morphismus f ist. Dann ist $m \circ s : S \hookrightarrow B$ ein Unterobjekt von B . Sei $g : B \rightarrow \Omega$ der charakteristische Morphismus dieses Unterobjektes von B . Wir werden nun zeigen, dass das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ \downarrow s & & \downarrow \mathbf{true} \\ A & \xrightarrow{m} B \xrightarrow{g} & \Omega \end{array}$$

ein Pullback-Quadrat. Falls dies stimmt, erhalten wir $mg = f$ nach der Eindeutigkeit des charakteristische Morphismus von s . Zuerst bemerken wir, dass dieses Diagramm kommutiert, da g der charakteristische Morphismus $m \circ s$ ist und daher $g \circ m \circ s = \mathbf{true}_T$ gilt. Sei nun $h : D \rightarrow A$ ein Morphismus mit $g \circ m \circ h = \mathbf{true}_D$. Dann gilt $g \circ (m \circ h) = \mathbf{true}_D$ und daher erhalten wir einen Morphismus $h_1 : D \rightarrow T$, so dass $m \circ s \circ h_1 = m \circ h$. Da m ein Monomorphismus ist, gilt damit auch $s \circ h_1 = h$. Also haben wir gezeigt, dass das obige Diagramm ein Pullback-Quadrat ist. \square

FOLGERUNG 2.21. Seien $A, B, C \in ob(\mathcal{E})$, $f : A \rightarrow \Omega^C$, dann existiert ein Morphismus $g : B \rightarrow \Omega^C$, so dass

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{m} & B \\ & \searrow f & \downarrow g \\ & & \Omega^C \end{array}$$

kommutiert.

Beweis: Da Ω^C das Potenzobjekt von C ist, gibt es einen Morphismus $\underline{f} : C \times A \rightarrow \Omega$ mit $\underline{f} = ev_C \circ (Id \times f)$. Die Transponierte dieses Morphismus ist dann gerade f .

Dann gibt es nach Satz 2.20 einen Morphismus $h : C \times B \rightarrow \Omega$, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C \times A & \xrightarrow{Id \times m} & B \\ & \searrow \underline{f} & \downarrow h \\ & & \Omega \end{array}$$

kommutiert. Sei nun $g : B \rightarrow \Omega^C$ die Transponierte von h . Es verbleibt der Beweis von $g \circ m = \underline{f}$. Nach Eindeutigkeit der Transponierten reicht es also zu zeigen, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C \times A & & \\ \downarrow Id \times (g \circ m) & \searrow \underline{f} & \\ C \times \Omega^C & \xrightarrow{ev_C} & \Omega \end{array}$$

kommutiert. Nach Definition g von h erhalten wir aber

$$\begin{aligned} ev_C \circ (Id \times (g \circ m)) &= ev_C \circ (Id \times g) \circ (Id \times m) \\ &= h \circ (Id \times m) = \underline{f}. \end{aligned}$$

□

Das folgende Theorem wird hier nur zitiert. Ein Beweis dieses Theorem ist nicht zu schwierig, erfordert aber mehr Kategorientheorie als wir hier benutzen wollen. Ein Beweis findet sich zum Beispiel in [MM92] Corollary IV.5.4.

THEOREM 2.22. *Ein Topos hat alle endlichen Colimiten, Pullbacks erhalten Colimiten und das initiale Objekt ist strikt initial.*

Wir haben bisher noch nicht erklärt, was es bedeutet, dass Pullback Colimiten erhalten. Dies bedeutet gerade, dass der Pullback-Funktor entlang eines Morphismus Colimiten erhält. Wir benötigen im folgenden Lemma 2.23 und Lemma 2.30 aber nur jeweils eine Instanz dieses Begriffes, der in beiden Fällen selbsterklärend ist. Für die genauen Zusammenhänge siehe [MM92] Kapitel I und IV oder [J02] Kapitel A.1.

FOLGERUNG 2.23. Sei $f : A \rightarrow C$, $g : B \rightarrow C$, $m : P \rightarrow B$ und $n : P \rightarrow A$ vier Morphismen, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{m} & B \\ \downarrow n & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

ein Pullback-Quadrat ist. Falls f ein Epimorphismus ist, dann ist auch m ein Epimorphismus.

Beweis: Nach Lemma 2.15 ist das folgende Diagramm ein Pushout-Quadrat:

$$\begin{array}{ccc} C & \xleftarrow{Id_C} & C \\ Id_C \uparrow & & \uparrow f \\ C & \xleftarrow{f} & A \end{array}$$

Da nach Theorem 2.22 Pullbacks Colimiten erhalten, ist dann

$$\begin{array}{ccc} A & \xleftarrow{\text{Id}_A} & A \\ \text{Id}_A \uparrow & & \uparrow m \\ A & \xleftarrow{m} & P \end{array}$$

ein Pushout-Quadrat. Nach Lemma 2.15 ist dann m ein Epimorphismus. □

FOLGERUNG 2.24. Sei $f : 0 \rightarrow A$ der einzige Morphismus von 0 nach A , dann ist f ein Monomorphismus.

Beweis: Seien $g, h : D \rightarrow 0$ zwei Morphismen mit $f \circ g = f \circ h$. Da nach Theorem 2.22 0 strikt initial ist, sind g und h Isomorphismen. Seien also $g', h' : 0 \rightarrow D$ die Inversen von g und h . Da es aber nur einen Morphismus von 0 nach D gibt, gilt $g' = h'$. Also gilt auch $g = g \circ h' \circ h = g \circ g' \circ h = h$. Damit ist f ein Monomorphismus. □

Wir nennen den charakteristischen Morphismus dieses Unterobjektes **false** $_A : A \rightarrow \Omega$. Für **false** $_1$ schreiben wir auch **false**.

Wir werden nun das Bild eines Morphismus definieren und mit Hilfe von Theorem 2.22 seine Existenz in einem Topos beweisen. Sei $f : A \rightarrow B$ ein Morphismus und ferner $m : D \hookrightarrow B$ ein Monomorphismus. Wir sagen, dass f durch m faktorisiert, falls es einen Morphismus $g : A \rightarrow D$ mit $m \circ g = f$ gibt. Wir definieren nun das Bild von f als das Minimum solcher Monomorphismen: Ein Monomorphismus $n : E \hookrightarrow B$ heißt Bild von f , falls f durch n faktorisiert und n auch durch alle anderen Monomorphismen $m : D \hookrightarrow B$, durch die f faktorisiert, faktorisiert. Nun beweisen wir die Existenz des Bildes.

SATZ 2.25. Sei $f : A \rightarrow B$ ein Morphismus, dann besitzt f ein Bild $e : E \hookrightarrow B$ und es gibt einen Epimorphismus $c : A \rightarrow E$ mit $f = e \circ c$.

Beweis: Nach Theorem 2.22 besitzt ein Topos alle Colimiten. Daher können wir den Pushout von f mit sich selber bilden. Die sind also die Morphismen $h_1 : B \rightarrow P$ und $h_2 : B \rightarrow P$, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} P & \xleftarrow{h_2} & B \\ h_1 \uparrow & & \uparrow f \\ B & \xleftarrow{f} & A \end{array}$$

ein Pushout-Quadrat ist. Sei nun $e : E \hookrightarrow B$ der Equalizer dieser beiden Morphismen h_1 und h_2 .

(3) e ist ein Bild von f .

Beweis: Zuerst zeigen wir, dass f durch e faktorisiert. Nach Definition der Morphismen h_1 und h_2 kommutiert das obige Diagramm und damit gilt $h_1 \circ f = h_2 \circ f$. Da nun e der Equalizer von h_1 und h_2 ist, gibt es also einen Morphismus $c : A \rightarrow E$ mit $e \circ c = f$. Damit faktorisiert f durch e . Sei nun $m : D \hookrightarrow B$ ein anderer Monomorphismus, durch den f faktorisiert. Sei dann $g : A \rightarrow D$ ein Morphismus, so dass $m \circ g = f$ gilt. Sei $k : B \rightarrow \Omega$ der charakteristische Morphismus von m . Dann $k \circ m \circ g = \mathbf{true}_A$ und damit $k \circ f = \mathbf{true}_A$. Ebenfalls gilt natürlich

$\mathbf{true}_B \circ f = \mathbf{true}_A$. Also gibt es nach der Pushout-Definition von h_1 und h_2 einen Morphismus $l : P \rightarrow \Omega$ mit $l \circ h_1 = k$ und $l \circ h_2 = \mathbf{true}_B$. Damit gilt

$$\begin{aligned} k \circ e &= l \circ h_1 \circ e \\ &= l \circ h_2 \circ e \\ &= \mathbf{true}_B \circ e \\ &= \mathbf{true}_E. \end{aligned}$$

Also gibt es nach Definition des charakteristischen Morphismus einen Morphismus $d : E \rightarrow A$, so dass $m \circ d = e$. Damit faktorisiert e durch m und damit ist e ein Bild von f .

□(3)

Es verbleibt also noch der Beweis, dass $c : A \rightarrow E$ ein Epimorphismus ist. Seien Q und die Morphismen $j_1 : E \rightarrow Q$ und $j_2 : E \rightarrow Q$ der Pushout von c mit sich selber. Nach dem bisherigen Beweis wissen nun, dass der Equalizer von j_1 und j_2 ein Bild von c ist. Sei nun $m : D \hookrightarrow E$ dieser Equalizer und $h : A \rightarrow D$ ein Morphismus mit $m \circ h = c$. Dann gilt $e \circ m \circ h = f$. Also faktorisiert f durch $e \circ m$ und damit auch sein Bild e . Also gibt es einen Morphismus $v : E \rightarrow D$, so dass $e = e \circ m \circ v$. Da e ein Monomorphismus ist, gilt dann $Id_E = m \circ v$. Da $j_1 \circ m = j_2 \circ m$, gilt dann auch $j_1 \circ m \circ v = j_2 \circ m \circ v$ und damit $j_1 = j_2$. Nun können wir zeigen, dass c ein Epimorphismus ist: Seien $k_1 : B \rightarrow T$ und $k_2 : B \rightarrow T$ zwei Morphismen mit $k_1 \circ c = k_2 \circ c$. Nach der Pushout-Definition von j_1 und j_2 gibt es dann einen Morphismus $k_3 : Q \rightarrow T$ mit $k_3 \circ j_1 = k_1$ und $k_3 \circ j_2 = k_2$. Da nun aber j_1 und j_2 gleich sind, gilt $k_1 = k_2$. Damit ist c ein Epimorphismus.

□

Das Bild eines Morphismus $f : A \rightarrow B$ ist natürlich eindeutig bis auf Isomorphie bestimmt: seien $m_1 : D_1 \hookrightarrow B$, $m_2 : D_2 \hookrightarrow B$ zwei Monomorphismen und $c_1 : A \rightarrow D_1$, $c_2 : A \rightarrow D_2$ zwei Morphismen mit $f = m_1 \circ c_1 = m_2 \circ c_2$. Dann gibt es $l_1 : D_1 \rightarrow D_2$ und $l_2 : D_2 \rightarrow D_1$ mit $m_1 \circ l_2 = m_2$ und $m_2 \circ l_1 = m_1$. Also gilt $m_1 = m_1 \circ l_2 \circ l_1$ und, da m_1 ein Monomorphismus ist, auch $l_2 \circ l_1 = Id_{D_1}$. Mit dem gleichen Argument erhalten $l_1 \circ l_2 = Id_{D_2}$ und damit sind l_1 und l_2 Isomorphismen. Also repräsentieren m_1 und m_2 dasselbe Unterobjekt von B . Wir nennen dieses Unterobjekt das Bild von f .

Sei $f = m \circ c$, wobei $c : A \rightarrow D$ ein Epimorphismus ist und $m : D \hookrightarrow B$ das Bild von f . Sei ferner ein weiterer Epimorphismus $c' : A \rightarrow D'$ und ein Monomorphismus $m' : D' \hookrightarrow B$ mit $f = c' \circ m'$ gegeben. Sei $k : B \rightarrow \Omega$ der charakteristische Morphismus von m . Dann gilt

$$k \circ m' \circ c' = k \circ m \circ c = \mathbf{true}_A = \mathbf{true}_{D'} \circ c'.$$

Da c' ein Epimorphismus ist, gilt weiter, dass $k \circ m' = \mathbf{true}_{D'}$. Damit gibt es ein Morphismus $l : D' \rightarrow D$ mit $m' = m \circ l$ und damit faktorisiert m' durch m . Also faktorisiert m' durch alle Monomorphismen, durch die m faktorisiert. Daher ist es ebenfalls ein Bild von f und nach dem vorherigen repräsentiert es das gleiche Unterobjekt von B wie m . Wir können also folgern, dass jedes mal, wenn wir eine Zerlegung eines Morphismus in einen Epimorphismus und einen Monomorphismus gegeben haben, dann ist dieses Unterobjekt das Bild von f . Wir nennen diese Zerlegung von f auch die Bildzerlegung von f .

Wir schließen nun diesen Abschnitt mit einer Betrachtung des Zusammenhanges zwischen Pullbacks und Bildern. Sei dafür ein Pullback-Quadrat

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & A \\ \downarrow h & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{g} & C \end{array}$$

gegeben. Sei nun $m : I \hookrightarrow C$, $c : A \rightarrow I$ die Bilderzerlegung von f . Betrachten wir nun den Pullback von m und g :

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{k} & I \\ \downarrow l & & \downarrow m \\ B & \xrightarrow{g} & C \end{array}$$

(4) l ist das Bild von h .

Beweis: Nach Lemma 2.14 ist dann l ein Monomorphismus. Ferner betrachte den Pullback von k und c :

$$\begin{array}{ccc} P' & \longrightarrow & A \\ \downarrow e & & \downarrow c \\ Q & \xrightarrow{k} & I \end{array}$$

Da c ein Epimorphismus ist, ist nach Folgerung 2.23 e ebenfalls ein Epimorphismus. Weil die beiden obigen Diagramme Pullback-Quadrat sind, ist auch im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} P' & \longrightarrow & A \\ \downarrow e & & \downarrow c \\ Q & \xrightarrow{k} & I \\ \downarrow l & & \downarrow m \\ B & \xrightarrow{g} & C \end{array}$$

das äußere Rechteck ein Pullback-Quadrat. Da $f = m \circ c$ gilt, ist P' gerade der Pullback von f und g . Damit gibt es einen Isomorphismus $\iota : P \rightarrow P'$, so dass $l \circ e \circ \iota = h$. Da $e \circ \iota$ ein Epimorphismus ist, ist l das Bild von h . □

Wir haben also nun gezeigt:

LEMMA 2.26. Pullbacks erhalten Bilder.

2. Heyting-Algebren in einem Topos

Nach der Definition eines Topos besitzt jeder Topos \mathcal{E} einen Unterobjektklassifizierer Ω und für jedes Objekt $A \in ob(\mathcal{E})$ ein Potenzobjekt Ω^A . Wir werden nun in diesem Abschnitt diese beide Objekte genauer untersuchen und feststellen, dass sie die Struktur einer Heyting-Algebra besitzen. Dies ist nicht besonders verwunderlich, wenn man sich wieder den Fall der Kategorie der Mengen anschaut. Es ist wohl bekannt, dass dort sowohl $\{0, 1\}$ als auch die Potenzmenge $P(M)$ einer Menge M eine boolsche Algebra bilden. In Fall der Potenzmenge ist gerade die Vereinigung die Addition und die Schnittbildung die Multiplikation. Ähnliche Strukturen

werden wir jetzt auch im Fall der Topoi finden.

Sei nun ein Objekt $A \in \text{ob}(\mathcal{E})$ gegeben. Wir definieren nun die Kategorie der Unterobjekte von A , $\text{Sub}(A)$. Objekte dieser Kategorie seien gerade die Unterobjekte von A . Für zwei Monomorphismen $m : D \rightarrow A$ und $n : E \rightarrow A$, sei ein Morphismus $f : D \rightarrow E$ ein Morphismus von m nach n , falls

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{f} & E \\ & \searrow m & \swarrow n \\ & & A \end{array}$$

kommutiert. Sei $f' : D \rightarrow E$ ein anderer Morphismus mit $n \circ f' = m$. Dann gilt $n \circ f' = n \circ f$ und daher $f = f'$, da n ein Monomorphismus ist. Seien nun $[m : D \rightarrow A]$ und $[n : E \rightarrow A]$ die zugehörigen Unterobjekte. Wir definieren

$$\text{Hom}_{\text{Sub}(A)}([m], [n]) := \begin{cases} \{*\}, & \text{es gibt einen Morphismus von } m \text{ nach } n \\ \emptyset, & \text{sonst} \end{cases}$$

Dies ist wohl definiert: Seien m und $m' : D' \rightarrow A$ und seien n und $n' : E' \rightarrow A$ äquivalent. Sei ferner $f : D \rightarrow E$ ein Morphismus von m und n , $\iota_1 : D \rightarrow D'$ und $\iota_2 : E \rightarrow E'$ die Isomorphismen zwischen m und m' und n und n' . Dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} D' & \xrightarrow{f'} & E' \\ \iota_1 \searrow & & \swarrow \iota_2 \\ D & \xrightarrow{f} & E \\ m' \searrow & & \swarrow n' \\ & & A \end{array}$$

wobei $f' = \iota_2^{-1} \circ f \circ \iota_1$. Also gibt es auch einen Morphismus von m' nach n' . Damit uns dies eine Kategorie liefert muss auch die Komposition wohldefiniert sein. Das heisst, wenn drei Monomorphismen $m : D \rightarrow A$, $n : E \rightarrow A$ und $o : F \rightarrow A$ und Morphismen $f : D \rightarrow E$ und $g : E \rightarrow F$ gegeben sind, so dass f ein Morphismus von m nach n und g ein Morphismus von n nach o , dann ist $g \circ f$ ein Morphismus von m nach o . Dies gilt, da folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} D & \xrightarrow{f} & E & \xrightarrow{g} & F \\ & \searrow m & \downarrow n & \swarrow o & \\ & & A & & \end{array}$$

Wir haben also nun die Kategorie $\text{Sub}(A)$ definiert. Wir werden sehen, dass dies eine partielle Ordnung ist. Da $\text{Sub}(A)$ eine Kategorie ist, wissen wir bereits, dass es eine reflexive und transitive Relation darstellt.

LEMMA 2.27. Sei $A \in \text{ob}(\mathcal{E})$, $m : D \rightarrow A$ und $n : E \rightarrow A$ zwei Monomorphismen und $f : D \rightarrow E$ ein Morphismus von m nach n , dann f ist ein Monomorphismus.

Beweis: Seien dafür zwei Morphismen $g, h : F \rightarrow D$ mit $f \circ h = f \circ g$ gegeben. Dann gilt auch $n \circ f \circ h = n \circ f \circ g$. Da f aber ein Morphismus zwischen m und n , erhalten wir nach Definition, dass $m \circ h = m \circ g$. Da aber wiederum m ein Monomorphismus ist, gilt $h = g$. Damit ist also auch f ein Monomorphismus. \square

Seien nun wieder zwei Monomorphismen $m : D \rightarrow A$ und $n : E \rightarrow A$ gegeben. Ferner seien zwei Morphismen $f : D \rightarrow E$ und $g : E \rightarrow D$ gegeben, wobei f ein Morphismus von m nach n und g ein Morphismus von n nach m ist. Damit gilt also, dass $m = n \circ f$ und $n = m \circ g$. Damit gilt aber auch, dass $m \circ g \circ f = n \circ f = m$. Da m ein Monomorphismus ist, erhalten wir $g \circ f = \text{Id}_D$. Mit den gleichen Argumenten sehen wir auch, dass $f \circ g = \text{Id}_E$ gilt. Daher f ist ein Isomorphismus und weiter sind n und m äquivalent. Also repräsentieren beide das gleiche Unterobjekt von A . Damit wissen wir das $\text{Sub}(A)$ eine anti-symmetrische Relation und damit eine partielle Ordnung darstellt.

Aus dem vorherigen Abschnitt wissen wir bereits, dass es einen Isomorphismus zwischen $\text{Sub}(A)$ und $\text{Hom}_{\mathcal{E}}(A, \Omega)$ gibt. Dieser weist jedem Unterobjekt seinen eindeutig bestimmten charakteristischen Morphismus zu. Wir wollen nun diesen Zusammenhang genauer beleuchten. Aber zuerst definieren wir $\wedge : \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$ als den charakteristischen Morphismus des Unterobjektes $\mathbf{true} \times \mathbf{true} : 1 \times 1 \rightarrow \Omega \times \Omega$; also als den eindeutig bestimmten Morphismen, der das folgende Diagramm zu einen Pullback-Quadrat macht:

$$\begin{array}{ccc} 1 \times 1 & \longrightarrow & 1 \\ \mathbf{true} \times \mathbf{true} \downarrow & & \downarrow \mathbf{true} \\ \Omega \times \Omega & \xrightarrow{\wedge} & \Omega \end{array}$$

Der Morphismus \wedge hat folgende wichtige Eigenschaft: seien zwei Morphismen $h_1 : D \rightarrow \Omega$ und $h_2 : D \rightarrow \Omega$ mit $\wedge \circ (h_1, h_2) = \mathbf{true}_D$ gegeben. Dann gilt nach der Pullbackdefinition von \wedge , dass $(\mathbf{true}_D, \mathbf{true}_D) = (h_1, h_2)$, also dass $h_1 = h_2 = \mathbf{true}_D$.

Seien $f, g : A \rightarrow \Omega$, dann schreiben wir für $\wedge \circ (f, g) : A \rightarrow \Omega$ nun $f \wedge g$. Ferner sagen wir, dass

$$(2.1) \quad f \leq g \text{ genau dann gilt, wenn } f \wedge g = f.$$

Wir werden gleich sehen, dass dies eine partielle Ordnung auf $\text{Hom}_{\mathcal{E}}(A, \Omega)$ ist. Seien nun zwei Morphismen $f, g : A \rightarrow \Omega$ mit $f \leq g$ gegeben. Sei $n : E \hookrightarrow A$ das zu f gehörige Unterobjekt von A . Dann gilt $(f \wedge g) \circ n = \mathbf{true}_E$. Damit folgt $\wedge \circ (f \circ n, g \circ n) = \mathbf{true}_E$. Daher gilt auch $g \circ n = \mathbf{true}_E$. Gelte nun umgekehrt, dass $g \circ n = \mathbf{true}_E$.

(2) Das folgende Diagramm ist ein Pullback-Quadrat:

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow n & & \downarrow \mathbf{true} \\ A & \xrightarrow{f \wedge g} & \Omega \end{array}$$

Beweis: Wegen $g \circ n = \mathbf{true}_E$, kommutiert das Diagramm. Sei nun ein Morphismus $k : F \rightarrow A$ mit $(f \wedge g) \circ k = \mathbf{true}_F$ gegeben. Dann gilt $\wedge \circ (f \circ k, g \circ k) = \mathbf{true}_F$ und damit $f \circ k = \mathbf{true}_F$. Also gibt es einen Morphismus $k' : F \rightarrow E$ mit $n \circ k' = k$. Damit ist das obige Diagramm ein Pullback-Quadrat.

□(2)

Damit erhalten wir also:

SATZ 2.28. Seien $f, g : A \rightarrow \Omega$ und $n : E \hookrightarrow A$ das zu f gehörige Unterobjekt von f , dann gilt $g \circ n = \mathbf{true}_E$ genau dann, wenn $f \leq g$.

Wir erhalten als direkte Folgerung aus diesem Satz, dass \mathbf{true}_A das Maximum dieser partiellen Ordnung ist: sei $f : A \rightarrow \Omega$ ein Morphismus und $n : E \hookrightarrow A$ das dazu gehörige Unterobjekt. Dann gilt natürlich, dass $\mathbf{true}_{A \circ n} = \mathbf{true}_E$ und damit gilt nach Satz 2.28 gerade $f \leq \mathbf{true}_A$. Nach Definition von \leq bedeutet dies natürlich auch, dass $f \wedge \mathbf{true}_A = f$ gilt. Ebenfalls erhalten wir, dass \mathbf{false}_A das Minimum bzgl. \leq ist: sei $g : 0 \hookrightarrow A$ der einzige Morphismus von 0 nach A . Dann ist für alle $f : A \rightarrow \Omega$ gerade $f \circ g$ der einzige Morphismus von 0 nach Ω . Da es eben nur einen solchen Morphismus gibt, ist dies gerade \mathbf{true}_0 . Nach Satz 2.28 gilt dann $\mathbf{false}_A \leq f$ für alle Morphismen $f : A \rightarrow \Omega$.

Seien $f, g : A \rightarrow \Omega$ gegeben und $n : E \hookrightarrow A$ und $n' : F \hookrightarrow A$ die entsprechenden Unterobjekte. Angenommen, es gelte $f \leq g$. Dann gilt nach Satz 2.28, dass $g \circ n = \mathbf{true}_E$. Nach Definition eines charakteristischen Morphismus gibt es also einen Morphismus $l : E \rightarrow F$ mit $n' \circ l = n$. Also ist l auch ein Morphismus zwischen n und n' . Damit ist also n kleiner als n' im Sinne der Ordnung auf $Sub(A)$. Gelte umgekehrt, dass es einen Morphismus $l : E \rightarrow F$ mit $n' \circ l = n$ gibt, dann gilt $g \circ n = g \circ n' \circ l = \mathbf{true}_E \circ l = \mathbf{true}_F$. Nach Satz 2.28 gilt dann $f \leq g$. Wir haben also gezeigt, dass die Bijektion zwischen $Sub(A)$ und $Hom_{\mathcal{E}}(A, \Omega)$ verträglich mit den beiden Relationen ist. Damit wissen wir auch, dass das \leq tatsächlich eine partielle Ordnung ist.

Natürlich erhalten wir für jedes Objekt $B \in ob(\mathcal{E})$ eine wie oben definierte partielle Ordnung auf $Hom_{\mathcal{E}}(B, \Omega)$. Die Definition dieser partiellen Ordnung ist verträglich mit der Komposition von Morphismen: Sei $f : B \rightarrow A$ ein Morphismus und $g, h : A \rightarrow \Omega$ zwei Morphismen mit $g \leq h$. Sei ferner $s : S \hookrightarrow A$ das zu g gehörige Unterobjekt. Nach Satz 2.28 gilt dann $h \circ s = \mathbf{true}_S$. Nach Lemma 2.17 ist $f^*(s)$ das zu $g \circ f$ gehörige Unterobjekt von B , wobei das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{p} & S \\ \downarrow f^*(s) & & \downarrow s \\ B & \xrightarrow{f} & A \end{array}$$

das entsprechende Pullback-Quadrat sei. Dann gilt

$$\begin{aligned} h \circ f \circ f^*(s) &= h \circ s \circ p \\ &= \mathbf{true}_S \circ p \\ &= \mathbf{true}_P. \end{aligned}$$

und damit nach Satz 2.28 $g \circ f \leq h \circ f$.

Wenden wir uns nun wieder \wedge zu. Wir wollen nun zeigen, dass $f \wedge g$ tatsächlich das Infimum von f und g bezüglich \leq ist. Dafür sei ein weiterer Morphismus $h : A \rightarrow \Omega$ gegeben mit $h \leq f$ und $h \leq g$. Sei nun $m : D \hookrightarrow A$ das zu h gehörige Unterobjekt.

Dann gilt nach dem vorherigen Satz gilt also, dass $g \circ m = f \circ m = \mathbf{true}_D$. Damit gilt

$$\begin{aligned} \wedge \circ (f, g) \circ m &= \wedge \circ (\mathbf{true}_D, \mathbf{true}_D) \\ &= \wedge \circ (\mathbf{true} \times \mathbf{true}) \circ (!_D, !_D) \\ &= \mathbf{true}_{1 \times 1} \circ (!_D, !_D) \\ &= \mathbf{true}_D \end{aligned}$$

und so nach Satz 2.28 $h \leq f \wedge g$. Tatsächlich gilt ferner $f \leq f \wedge g$ und $g \leq f \wedge g$: sei dafür $s : S \hookrightarrow A$ das zu $f \wedge g$ gehörige Unterobjekt. Dann gilt $\wedge \circ (f, g) \circ s = \mathbf{true}_S$. Damit gilt nach Definition von \wedge , dass $f \circ s = g \circ s = \mathbf{true}_S$. Damit gilt nach Satz 2.28, dass $f \leq f \wedge g$ und $g \leq f \wedge g$. Damit wissen wir das $f \wedge g$ gerade das Infimum von f und g bezüglich der partiellen Ordnung \leq ist. Wir können aber noch ein explizite Konstruktion für das zu $f \wedge g$ gehörige Unterobjekt von A geben:

LEMMA 2.29. Seien $s : S \rightarrow A, t : T \rightarrow A$ zwei Unterobjekte von A und $f, g : A \rightarrow \Omega$ ihre charakteristischen Morphismen, dann ist $\wedge \circ (f, g)$ der charakteristische Morphismus des Pullbacks von s und t .

Beweis: Sei also das folgende Pullback-Quadrat gegeben:

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{p} & S \\ \downarrow q & & \downarrow s \\ T & \xrightarrow{t} & A \end{array}$$

Wir wollen nun zeigen, dass auch das folgende Diagramm

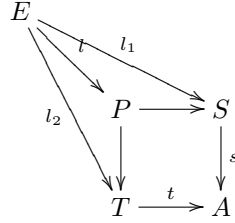
$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow s \circ p & & \downarrow \mathbf{true} \\ A & \xrightarrow{\wedge \circ (f, g)} & \Omega \end{array}$$

ein Pullback-Quadrat ist. Nach dem obigen Pullback-Quadrat und der Definition von \wedge , erhalten wir

$$\begin{aligned} \wedge \circ (f, g) \circ s \circ p &= \wedge \circ (f \circ s \circ p, g \circ s \circ p) \\ &= \wedge \circ (f \circ s \circ p, g \circ t \circ q) \\ &= \wedge \circ (\mathbf{true}_P, \mathbf{true}_P) \\ &= \mathbf{true}_P. \end{aligned}$$

Damit kommutiert das obige Diagramm. Sei nun ein Morphismus $h : E \rightarrow A$ mit $\wedge \circ (f, g) \circ h = \mathbf{true}_E$ gegeben. Dann gilt ebenfalls, dass $\wedge \circ (f \circ h, g \circ h) = \mathbf{true}_E$. Nach Definition von \wedge erhalten wir $f \circ h = \mathbf{true}_E$ und $g \circ h = \mathbf{true}_E$. Also gibt es jeweils genau einen Morphismus $l_1 : E \rightarrow S$ und $l_2 : E \rightarrow T$ mit $s \circ l_1 = h$ bzw. $t \circ l_2 = h$. Nach Definition von P , gibt es dann genau einen Morphismus $l : E \rightarrow P$,

so dass



kommutiert. Da aber $h = s \circ l_1 = s \circ p \circ l$ gilt, ist das obige Diagramm ein Pullback-Quadrat.

□

Wir haben also nun das Infimum zweier Elemente von $\text{Hom}_{\mathcal{E}}(A, \Omega)$ bestimmt und einige Aussagen darüber bewiesen. Wenden wir uns nun also dem Supremum zweier Elemente zu. Wir wollen dafür die Morphismen $\text{Id} \times \mathbf{true} : 1 \times \Omega \rightarrow \Omega \times \Omega$ und $\mathbf{true} \times \text{Id} : 1 \times \Omega \rightarrow \Omega \times \Omega$ betrachten. Dann gibt es einen Morphismus $(\text{Id} \times \mathbf{true}, \mathbf{true} \times \text{Id}) : 1 \times \Omega \cup \Omega \times 1 \rightarrow \Omega \times \Omega$. Sei ferner $m : I \hookrightarrow \Omega \times \Omega$ das Bild dieses Morphismus, dann definieren wir $\vee : \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$ als charakteristischen Morphismus dieses Unterobjektes. Seien nun zwei Morphismen $f, g : A \rightarrow \Omega$ gegeben. Wir definieren $f \vee g$ als $\vee \circ (f, g)$.

LEMMA 2.30. Seien $s : S \hookrightarrow A$ und $t : T \hookrightarrow A$ zwei Unterobjekte und $f, g : A \rightarrow \Omega$ deren charakteristischer Morphismen, dann ist $\vee \circ (f, g)$ der charakteristische Morphismus des Bildes von (s, t) .

Beweis: Zuerst beweisen wir, dass die beiden Diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 S & \xrightarrow{(!, g \circ s)} & 1 \times \Omega \\
 \downarrow s & & \downarrow (\mathbf{true}, \text{Id}) \\
 A & \xrightarrow{(f, g)} & \Omega \times \Omega
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 T & \xrightarrow{(f \circ t, !)} & \Omega \times 1 \\
 \downarrow t & & \downarrow (\text{Id}, \mathbf{true}) \\
 A & \xrightarrow{(f, g)} & \Omega \times \Omega
 \end{array}$$

Pullback-Quadrat sind. Betrachten wir zuerst das linke Diagramm. Da f der charakteristische Morphismus von s ist, erhalten wir

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{true}, \text{Id}) \circ (!, g \circ s) &= (\mathbf{true}_S, g \circ s) \\
 &= (f \circ s, g \circ s) \\
 &= (f, g) \circ s.
 \end{aligned}$$

Damit kommutiert das linke Diagramm. Seien nun zwei Morphismen $h : D \rightarrow A$ und $k = (!, k') : D \rightarrow 1 \times \Omega$ gegeben mit $(f, g) \circ h = (\mathbf{true}, \text{Id}) \circ k$. Dann gilt $f \circ h = \mathbf{true}_D$ und $g \circ h = k'$. Also gibt es einen Morphismus $h' : D \rightarrow S$ mit $s \circ h' = h$. Ferner gilt

$$(!, g \circ s) \circ h' = (!_D, g \circ s \circ h') = (!_D, g \circ h) = (!_D, k').$$

Sei $l : D \rightarrow S$ ein weiterer Morphismus mit $s \circ l = h$ und $(!, g \circ s) \circ l = (!_D, k')$. Da aber s ein Monomorphismus ist und $s \circ l = h = s \circ h'$, gilt $l = h'$. Damit ist also das linke Diagramm ein Pullback-Quadrat. Man erhält genauso, dass auch das rechte Diagramm ein Pullback-Quadrat ist. Nach Theorem 2.22 erhalten Pullbacks

Colimiten. Damit ist auch

$$\begin{array}{ccc} S \cup T & \xrightarrow{(!, g \circ s) \cup (f \circ t, !)} & 1 \times \Omega \cup \Omega \times 1 \\ \downarrow (s, t) & & \downarrow (\mathbf{true} \times Id, Id \times \mathbf{true}) \\ A & \xrightarrow{(f, g)} & \Omega \times \Omega \end{array}$$

ein Pullback-Quadrat. Sei $m : I \hookrightarrow A$ das Bild von (s, t) und $n : J \hookrightarrow \Omega \times \Omega$ das Bild von $(\mathbf{true} \times Id, Id \times \mathbf{true})$. Da nach Lemma 2.26 ebenfalls Bilder von Pullbacks erhalten werden, ist ebenfalls das linke der beiden Quadrate im folgenden Diagramm ein Pullback-Quadrat:

$$\begin{array}{ccccc} I & \longrightarrow & J & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow m & & \downarrow n & & \downarrow \mathbf{true} \\ A & \xrightarrow{(f, g)} & \Omega \times \Omega & \xrightarrow{\vee} & \Omega \end{array}$$

Da nach Definition auch das rechte Quadrat in diesem Diagramm ein Pullback ist, ist also auch das äußere Rechteck ein Pullback-Quadrat. Damit ist $\vee \circ (f, g)$ der charakteristische Morphismus von m .

□

Wir wollen nun zeigen, dass $f \vee g$ wirklich das Supremum bzgl. \leq von f und g ist. Seien dafür wieder $s : S \hookrightarrow A$ und $t : T \hookrightarrow A$ die zu f und g korrespondierenden Unterobjekte von A . Sei ferner mit $h : A \rightarrow \Omega$ ein dritter Morphismus gegeben mit $f \leq h$ und $g \leq h$. Dann gilt

$$h \circ (s, t) = (h \circ s, h \circ t) = (\mathbf{true}_S, \mathbf{true}_T) = \mathbf{true} \circ (!_S, !_T) = \mathbf{true} \circ !_S \cup T.$$

Sei nun wieder $m : I \hookrightarrow A$, $c : S \cup T \rightarrow I$ die Bildzerlegung von (s, t) . Damit gilt

$$h \circ m \circ c = \mathbf{true}_{S \cup T} = \mathbf{true}_I \circ c.$$

Da c ein Epimorphismus ist, gilt dann also $h \circ m = \mathbf{true}_I$ und damit nach Lemma 2.30 und Satz 2.28 gerade $f \vee g \leq h$. Es bleibt nun zu zeigen, dass $f \leq f \vee g$ und $g \leq f \vee g$ gilt. Es gilt

$$\begin{aligned} \vee \circ (f, g) \circ s &= \vee \circ (f, g) \circ (s, t) \circ \nu_S \\ &= \vee \circ (\mathbf{true}_S, \mathbf{true}_T) \circ \nu_S \\ &= \mathbf{true}_{S \cup T} \circ \nu_S \\ &= \mathbf{true}_S. \end{aligned}$$

Nach Satz 2.28 erhalten wir hieraus $f \leq f \vee g$. Mit den gleichen Argumenten sieht man ebenfalls, dass auch $g \leq f \vee g$. Damit haben wir nun gezeigt, dass $f \vee g$ das Supremum bzgl. \leq von f und g ist.

Nachdem wir nun das Infimum und Supremum zweier Morphismen betrachtet haben, wenden wir uns der Implikation zu. Dafür definieren wir zuerst den Morphismus $=_\Omega : \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$. Für ein beliebiges Objekt $B \in ob(\mathcal{E})$, definieren wir $=_B$ als charakteristischen Morphismus des Monomorphismuses $\Delta_B := (Id_B, Id_B) : B \hookrightarrow B \times B$. Mit anderen Worten: wir definieren ihn als den eindeutig bestimmten

Morphismus, der das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow \Delta_B & & \downarrow \mathbf{true} \\ B \times B & \xrightarrow{=} & \Omega \end{array}$$

zu einem Pullback-Quadrat macht. Wir beweisen zuerst folgendes wichtiges Lemma:

LEMMA 2.31. Seien $B, C \in \text{ob}(\mathcal{E})$ zwei Objekte und $f, g : B \rightarrow C$ zwei Morphismen, dann gilt

$$=_C \circ(f, g) = \mathbf{true}_B \text{ genau dann, wenn } f = g.$$

Beweis: Angenommen, es gelte $=_C \circ(f, g) = \mathbf{true}_C$. Dann gibt es nach Definition von $=_C$ einen Morphismus $h : B \rightarrow C$ mit $\Delta_C \circ h = (f, g)$. Dann gilt $(h, h) = (f, g)$ und so $h = f = g$. Gelte umgekehrt, dass $f = g$ ist, dann gilt

$$\begin{aligned} =_C \circ(f, f) &= =_C \circ \Delta_C \circ f \\ &= \mathbf{true}_C \circ f \\ &= \mathbf{true}_B. \end{aligned}$$

□

Dieses Lemma stellt den ersten Zusammenhang zwischen externer und interner Logik da: sind zwei Morphismen gleich in der internen Logik, also ergibt ihre Verknüpfung mit $=_C$ wahr, also \mathbf{true}_D , dann sind diese zwei Morphismen tatsächlich auch von aussen gesehen gleich.

Wenden wir uns nun wieder der Definition der Implikation zu: Wir definieren $\Rightarrow : \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$ als $=_\Omega \circ(\wedge, \pi_1)$. Seien zwei Morphismen $f, g : A \rightarrow \Omega$ gegeben. Wir schreiben $f \Rightarrow g$ für $\Rightarrow \circ(f, g)$. Wir untersuchen nun den genauen Zusammenhang zwischen \Rightarrow und unserer Ordnung \leq : Es gelte nun $f \Rightarrow g = \mathbf{true}_A$ gegeben. Nach Definition gilt dies genau dann, wenn $=_\Omega \circ(f \wedge g, f) = \mathbf{true}_A$. Nach vorherigem Lemma 2.31 gilt dies genau dann, wenn $f \wedge g = f$. Nach Definition von \leq also genau dann, wenn $f \leq g$. Somit erhalten wir

FOLGERUNG 2.32. Seien $f, g : A \rightarrow \Omega$ zwei Morphismen, dann gilt

$$f \leq g \text{ genau dann, wenn } f \Rightarrow g = \mathbf{true}_A.$$

Angenommen, dass $(f \Rightarrow g) \wedge (g \Rightarrow f) = \mathbf{true}_A$. Dies gilt genau dann, wenn $f \Rightarrow g = \mathbf{true}_A$ und $g \Rightarrow f = \mathbf{true}_A$. Nach Folgerung 2.32 gilt dies genau dann, wenn $f \leq g$ und $g \leq f$. Da \leq anti-symmetrisch ist, gilt dies wiederum genau dann, wenn $f = g$. Schliesslich gilt dies nach Lemma 2.31 genau dann, wenn $=_\Omega \circ(f, g) = \mathbf{true}_A$. Sei also $\Leftrightarrow : \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$ der Morphismus $\wedge \circ(\Rightarrow \circ(\pi_1, \pi_2), \Rightarrow \circ(\pi_2, \pi_1))$, dann gilt aufgrund der Eindeutigkeit charakteristischer Morphismen:

FOLGERUNG 2.33. $=_\Omega = \Leftrightarrow$.

Ziel unserer Definition von \Rightarrow ist natürlich, dass $f \Rightarrow g$ uns gerade die Implikation in unserer partiellen Ordnung \leq liefert. Nachdem wir gezeigt haben, dass unsere partielle Ordnung Infima und Suprema besitzt, wüssten wir dann, dass es sich sogar um eine Heyting-Algebra handelt.

SATZ 2.34. Seien $f, g : A \rightarrow \Omega$ zwei Morphismen, dann gilt

$$f \wedge g \leq h \text{ genau dann, wenn } f \leq g \Rightarrow h$$

Beweis: Sei $m : B \hookrightarrow A$ das zu f gehörige Unterobjekt von A . Nach Satz 2.28 gilt

$$f \leq g \Rightarrow h \text{ genau dann, wenn } (g \Rightarrow h) \circ m = \mathbf{true}_B.$$

Nach vorheriger Folgerung 2.32, gilt nun also $(g \Rightarrow h) \circ m = \mathbf{true}_B$ genau dann, wenn gilt $g \circ m \leq h \circ m$. Also müssen wir nur zeigen, dass $g \circ m \leq h \circ m$ genau dann gilt, wenn $f \wedge g \leq h$.

Angenommen, es gelte $g \circ m \leq h \circ m$. Dann gilt $g \circ m \wedge h \circ m = g \circ m$. Sei $n : C \hookrightarrow A$ das zu g gehörige Unterobjekt. Nach Lemma 2.29, ist das Unterobjekt, welches zu $f \wedge g$ gehört, gerade $n \circ i$, wobei $i : P \rightarrow C$ und das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{i} & C \\ \downarrow j & & \downarrow n \\ B & \xrightarrow{m} & A \end{array}$$

ein Pullback-Quadrat ist. Dann gilt nach Definition von n

$$\begin{aligned} g \circ n \circ i &= \mathbf{true}_C \circ i \\ &= \mathbf{true}_P. \end{aligned}$$

Dann gilt ebenfalls $g \circ m \circ j = \mathbf{true}_P$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \wedge \circ (g \circ m \circ j, h \circ m \circ j) &= \wedge \circ (g \circ m, h \circ m) \circ j \\ &= g \circ m \circ j \\ &= \mathbf{true}_P \end{aligned}$$

und damit $h \circ m \circ j = \mathbf{true}_P$. Also gilt nach Satz 2.28, dass $f \wedge g \leq h$.

Gelte umgekehrt, dass $f \wedge g \leq h$. Dann gilt $(f \wedge g) \circ m = \wedge \circ (f \circ m, g \circ m)$. Da aber f der charakteristische Morphismus von m ist, gilt $f \circ m = \mathbf{true}_B$. Weil die Verkettung mit \wedge das Infimum zweier Morphismen liefert und \mathbf{true}_B das Maximum der entsprechend Ordnung ist, gilt $(f \wedge g) \circ m = g \circ m$. Dann gilt also

$$\begin{aligned} (g \circ m) \wedge (h \circ m) &= ((f \wedge g) \circ m) \wedge (h \circ m) \\ &= \wedge \circ (f \wedge g, h) \circ m \\ &= (f \wedge g) \circ m \\ &= g \circ m. \end{aligned}$$

Damit gilt nach Definition von \leq , dass $g \circ m \leq h \circ m$. □

Zusammenfassend ergibt sich also:

THEOREM 2.35. *Sub(A) und $\text{Hom}_{\mathcal{E}}(A, \Omega)$ sind zueinander isomorphe Heyting-Algebren.*

Wie in jeder Heyting-Algebra ist die Negation $\neg f$ eines Morphismus $f : A \rightarrow \Omega$ gerade $f \Rightarrow \mathbf{false}_A$. Dann ist nach Lemma 2.32 und der Reflexivität von \leq $\neg \mathbf{false}_A = \mathbf{true}_A$. Generell gilt aber nicht, dass $f \vee \neg f = \mathbf{true}_A$.

DEFINITION 2.36. Wir sagen ein Topos \mathcal{E} ist boolesch, falls für alle $A \in \text{ob}\mathcal{E}$ $\text{Hom}_{\mathcal{E}}(A, \Omega)$ bzgl. \leq sogar eine boolesche Algebra ist.

Wir haben also nun gezeigt, dass es in einem Topos Heyting-Algebren gibt. Dies wird uns ermöglichen intuitionistische propositionelle Logik dort zu interpretieren. Im nächsten Abschnitt werden wir uns der Interpretation von Quantoren in Topoi und damit der prädikativen Logik zuwenden. Vorher wollen wir noch den Fall betrachten, dass ein Topos vollständig ist, dass er also alle Limiten und Colimiten enthält. Wir werden nun zeigen, dass dann die Heyting-Algebra $\text{Hom}_{\mathcal{E}}(A, \Omega)$ ebenfalls vollständig ist.

Sei dafür nun I ein beliebige Index. Ferner sei $\prod_{i \in I} 1$ das Produkt von $(1)_{i \in I}$. Sei dann \wedge_I der charakteristische Morphismus von $\mathbf{true} \times \dots \times \mathbf{true} : \prod_{i \in I} 1 \rightarrow \prod_{i \in I} \Omega$. Seien nun $(f_i)_{i \in I}$ eine Familie von Morphismen von A nach Ω . Sei nun $h : A \rightarrow \prod_{i \in I} \Omega$ der induzierte Morphismus dieser Familie. Wir wollen nun zeigen, dass $\wedge_I \circ h$ das Infimum dieser Familie ist. Sei nun $g : A \rightarrow \Omega$ mit $g \leq f_i$ für alle $i \in I$. Sei $s : S \hookrightarrow A$ das zu g gehörige Unterobjekt, dann gilt nach Satz 2.28 $f_i \circ s = \mathbf{true}_S$ für alle $i \in I$. Damit gilt ähnlich im endlichen Fall

$$\wedge_I \circ h \circ s = \wedge_I \circ (\mathbf{true} \times \dots \times \mathbf{true}) \circ !_S = \mathbf{true}_{\prod_{i \in I} 1} \circ s = \mathbf{true}_S.$$

Nach Satz 2.28 ist also $g \leq \wedge_I \circ h$. Ferner ist noch zu zeigen, dass für alle $i \in I$ gilt $\wedge_I \circ h \leq f_i$. Sei nun dafür $t : T \hookrightarrow A$ das zu h gehörige Unterobjekt. Dann gilt $\wedge_I \circ h \circ t = \mathbf{true}_T$. Damit gibt es genau einen Morphismus $m : T \rightarrow \prod_{i \in I} 1$ mit $(\mathbf{true} \times \dots \times \mathbf{true}) \circ m = h \circ t$. Damit gilt insbesondere $\mathbf{true} \circ m = f_i \circ t$ und daher $\mathbf{true}_T = f_i \circ t$. Nach Satz 2.28 erhalten wir also $f_i \leq \wedge_I \circ h$. Damit ist $\wedge_I \circ h$ das Infimum der Familie $(f_i)_{i \in I}$.

Betrachten wir also nun die Suprema: Sei S_i das Produkt $\Omega \times \dots \times \Omega \times 1 \times \Omega \times \dots$, wobei Ω gerade an der i -ten Stelle vorkommt und sei dann $s_i : S_i \hookrightarrow \prod_{i \in I} \Omega$ der Morphismus $(Id \times \dots \times Id \times \mathbf{true} \times Id \dots)$. Ferner sei $\bigcup_{i \in I} S_i$ die disjunkte Vereinigung dieser Familie von Produkten. Entsprechend zum zwei-elementigen Fall definieren wir $\vee_I : \prod_{i \in I} \Omega \rightarrow \Omega$ als den charakteristischen Morphismus des induzierten Morphismus $s_1 \times \dots \times s_i \times \dots$. Wie in Lemma 2.30 erhalten wir nun wieder aus Theorem 2.22, folgende Charakterisierung des Unterobjektes $\vee_I \circ h$:

LEMMA 2.37. Sei für jedes $i \in I$ $t_i : T_i \hookrightarrow A$ ein Unterobjekt mit charakteristischen Morphismus $f_i : A \rightarrow \Omega$. Sei k der von den t_i 's induzierte Morphismus $\bigcup_{i \in I} T_i \rightarrow A$ und h der von den f_i 's induzierte Morphismus $A \rightarrow \prod_{i \in I} \Omega$. Dann ist $\vee_I \circ h$ der charakteristische Morphismus des Bildes von k .

Mit Hilfe von Lemma 2.37 zeigen wir nun, dass \vee uns wirklich die Suprema liefert. Sei daher wie im Lemma für jedes $i \in I$ $t_i : T_i \hookrightarrow A$ ein Unterobjekt mit charakteristischen Morphismus $f_i : A \rightarrow \Omega$. Sei k der von den t_i 's induzierte Morphismus $\bigcup_{i \in I} T_i \rightarrow A$ und h der von den f_i 's induzierte Morphismus $A \rightarrow \prod_{i \in I} \Omega$. Ferner sei nun $l : A \rightarrow \Omega$ ein Morphismus mit $f_i \leq l$ für alle $i \in I$. Wir wollen zeigen, dass dann $\vee \circ h \leq l$ gilt. Nach Satz 2.28 erhalten wir dann wie im endlichen Fall

$$\begin{aligned} l \circ k &= (l \circ t_1, \dots, l \circ t_i, \dots) \\ &= (\mathbf{true}_{T_1}, \dots, \mathbf{true}_{T_i}, \dots) \\ &= \mathbf{true}_{\bigcup_{i \in I} T_i}. \end{aligned}$$

Sei nun $m : I \hookrightarrow A$, $c : \bigcup_{i \in I} T_i \rightarrow I$ die Bildzerlegung von k . Dann gilt

$$l \circ m \circ c = \mathbf{true}_{\bigcup_{i \in I} T_i} = \mathbf{true}_I \circ c.$$

Da c ein Epimorphismus ist, gilt damit nach Lemma 2.37 und Satz 2.28, dass $\vee \circ h \leq l$. Es bleibt zu zeigen, dass für alle $i \in I$ gilt $f_i \leq \vee \circ h$, aber auch das folgt exakt wie im endlichen Fall. Damit ist $\vee \circ h$ das Supremum von $(f_i)_{i \in I}$. Insgesamt folgt also:

SATZ 2.38. Sei \mathcal{E} vollständig und $A \in \text{ob}(\mathcal{E})$, dann ist $\text{Hom}_{\mathcal{E}}(A, \Omega)$ bzgl. \leq eine vollständige Heyting-Algebra.

3. Quantoren in einem Topos

Nachdem im vorherigen Abschnitt erklärt wurde, wie logische Konnektoren in Topoi interpretiert werden, blieb die Frage der Interpretation von Quantoren ungeklärt. Dies ist nun das Ziel dieses Abschnittes. Betrachten wir hierfür zunächst den Allquantor. Wir suchen also wieder nach einer Eigenschaft des Allquantor, die auf den Fall der Kategorietheorie übertragen können. Seien zwei Mengen M und N gegeben und ferner eine Formel $\varphi(x, y)$. Dann gibt es eine Teilmengen $D \subset M \times N$ mit $D = \{(m, n) \in M \times N \mid \varphi(m, n)\}$. Wie hängt diese nun mit der Teilmenge $E \subset N$ zusammen, wobei $E = \{n \in N \mid \forall m \in M \varphi(m, n)\}$? Es ist sicherlich so, dass das Urbild von E unter der Projektion $\pi : M \times N \rightarrow N$ eine Teilmenge von D ist. Sei nun $F \subset N$ eine andere Teilmenge mit dieser Eigenschaft, dass also $\pi^{-1}(F) \subset D$ gilt. Für jedes $n \in F$ ist aber $(m, n) \in \pi^{-1}(F)$, für alle $m \in M$. Danach muss für jedes $n \in F$ gelten, dass $\{(m, n) \in M \times N \mid m \in M\}$ eine Teilmenge von D ist. Dann gilt also für alle $n \in F$: $\forall m \in M \varphi(m, n)$ und damit ist F eine Teilmenge von E . Wir können also E beschreiben als die maximale Teilmenge von N , so dass das Urbild von E unter π in D liegt. Da wir bereits in Abschnitt 2 dieses Kapitel den Begriff der Teilmenge und des Urbilds kategorientheoretisch fundiert haben, haben wir nun die Möglichkeit mit Hilfe dieser Begriffe Quantoren in einem Topos zu interpretieren.

DEFINITION 2.39. Sei $m : E \hookrightarrow A \times B$ ein Unterobjekt von $A \times B$. Dann definiere $\forall_A(m)$ als das Maximum der Unterobjekte $n : F \hookrightarrow B$ von B , für die das Urbild von n unter π_B , $\pi_B^*(n)$, als Unterobjekt kleiner ist als m .

Apriori ist jedoch nicht klar, dass ein solches Unterobjekt existiert. In der Tat existiert aber so ein Unterobjekt nicht nur für solche Konstruktionen mit Urbildern von Projektionen, sondern für beliebige Morphismen. Wir benötigen diesen Fall im folgenden jedoch nicht und beweisen daher nur den besprochenen Spezialfall. Für die Konstruktion und Definition des allgemeinen Falles vergleiche [MM92],[J02] oder [MR77].

SATZ 2.40. Sei $m : E \hookrightarrow A \times B$ ein Unterobjekt, dann existiert ein Maximum für die Menge der Unterobjekte $n : F \hookrightarrow B$ mit der Eigenschaft, dass das Urbild von n unter π_B , $(\pi_B)^*(n)$, ein kleineres Unterobjekt ist als m .

Beweis: Zuerst bemerken wir, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A \times F & \xrightarrow{(Id \times n)} & A \times B \\ \pi_F \downarrow & & \downarrow \pi_B \\ F & \xrightarrow{n} & B \end{array}$$

offensichtlich ein Pullback-Quadrat ist. Daher gilt für gegebenes Unterobjekt $n : F \hookrightarrow B$, dass $(\pi_B)^*(n)$ gerade das Unterobjekt $(Id \times n)$ ist. Nun wenden wir uns der Konstruktion eines Unterobjektes $h : D \hookrightarrow B$ mit der gewünschten Eigenschaft

zu. Sei dafür nun $f : A \times B \rightarrow \Omega$ der charakteristische Morphismus von m . Sei nun $\bar{f} : B \rightarrow \Omega^A$ die Transponierte von f und $\overline{\mathbf{true}}_{A \times B} : B \rightarrow \Omega^A$ die Transponierte von $\mathbf{true}_{A \times B}$. Sei dann $e : H \hookrightarrow B$ der Equalizer der beiden Morphismen \bar{f} und $\overline{\mathbf{true}}_{A \times B}$. Wir wissen bereits, dass das Urbild von e unter π_B das Unterobjekt $(Id \times e) : A \times H \hookrightarrow A \times B$ ist. Es bleibt also zu zeigen, dass $(Id \times e)$ kleiner ist als m und dass e das maximale Objekt mit dieser Eigenschaft ist.

(1) $(Id \times e)$ ist kleiner als $m : E \hookrightarrow A \times B$

Beweis: Nach Satz 2.28 ist dann zu zeigen, dass $f \circ (Id \times e) = \mathbf{true}_{A \times H}$ gilt. Aber die Definition von e ergibt, dass

$$\begin{aligned} f \circ (Id \times e) &= ev_A \circ (Id \times \bar{f}) \circ (Id \times e) \\ &= ev_A \circ (Id \times \bar{f} \circ e) \\ &= ev_A \circ (Id \times \overline{\mathbf{true}}_{A \times B} \circ e) \\ &= ev_A \circ (Id \times \overline{\mathbf{true}}_{A \times B}) \circ (Id \times e) \\ &= \mathbf{true}_{A \times B} \circ (Id \times e) \\ &= \mathbf{true}_{A \times H}. \end{aligned}$$

□(1)

Sei nun $l : K \hookrightarrow B$ ein anderes Unterobjekt von B , so dass $(Id \times l) : A \times K \rightarrow A \times B$ durch $m : E \rightarrow A \times B$ faktorisiert. Dann gilt nach Satz 2.28, dass $f \circ (Id \times l) = \mathbf{true}_{A \times K}$. Hieraus folgt dann auch, dass

$$ev_A \circ (Id \times \bar{f} \circ l) = ev_A \circ (Id \times \bar{f}) \circ (Id \times l) = f \circ (Id \times l) = \mathbf{true}_{A \times K},$$

und dass

$$\begin{aligned} ev_A \circ (Id \times \overline{\mathbf{true}}_{A \times B} \circ l) &= ev_A \circ (Id \times \overline{\mathbf{true}}_{A \times B}) \circ (Id \times l) \\ &= \mathbf{true}_{A \times B} \circ (Id \times l) \\ &= \mathbf{true}_{A \times K}. \end{aligned}$$

Da aber jeder Morphismus nur eine Transponierte besitzt, liefern uns die beiden letzten Gleichungen, dass

$$\overline{\mathbf{true}}_{A \times B} \circ l = \bar{f} \circ l.$$

Nun ist $e : H \hookrightarrow B$ aber gerade als Equalizer dieser beiden Morphismen definiert. Daher faktorisiert also $l : K \hookrightarrow B$ durch $e : H \hookrightarrow K$. Damit haben wir also schließlich gezeigt, dass $e : H \hookrightarrow K$ das gewünschte Maximum ist.

□

Da wir einen inzwischen wohl bekannten Isomorphismus zwischen $Sub(A \times B)$ und $Hom_{\mathcal{E}}(A \times B, \Omega)$ haben, können wir auch eine Abbildung $\forall_A : Hom_{\mathcal{E}}(A \times B, \Omega) \rightarrow Hom_{\mathcal{E}}(B, \Omega)$ definieren: Sei ein Morphismus $f : A \times B \rightarrow \Omega$ gegeben und $m : E \hookrightarrow A \times B$ das zu f korrespondierende Unterobjekt. Dann definiere $\forall_A(f)$ als den charakteristischen Morphismus von $\forall_A(m)$.

Wir betrachten zuerst die Funktorialität von \forall : Sei $f, g : A \times B \rightarrow \Omega$ mit $f \leq g$ gegeben. Seien ferner $s : S \hookrightarrow A \times B$ und $t : T \hookrightarrow A \times B$ die zu f und g gehörigen Unterobjekte von $A \times B$. Ferner sei $m : E \hookrightarrow B$ das zu $\forall_A(f)$ gehörige und $n : F \hookrightarrow B$ das zu $\forall_A(g)$ gehörige Unterobjekt von B . Dann gilt nach Konstruktion, dass $(\pi_B)^*(m)$ ein kleineres Unterobjekt ist als s . Damit ist es auch ein kleineres Unterobjekt als t . Nun ist aber n das maximale Unterobjekt von B ,

so dass $(\pi_B)^*(n)$ kleiner ist als t . Damit gilt, dass m kleiner ist als n und so gilt $\forall_A(f) \leq \forall_A(g)$. Damit erhalten wir also:

LEMMA 2.41. Seien $f, g : A \times B \rightarrow \Omega$ zwei Morphismen mit $f \leq g$, dann gilt $\forall_A(f) \leq \forall_A(g)$.

Nun betrachten wir einige wichtige Eigenschaften der Quantifizierung. Das erste folgende Lemma zeigt wieder wie interne und externe Logik zusammenspielen.

LEMMA 2.42. Sei $f : A \times B \rightarrow \Omega$ ein Morphismus, dann gilt

$$f = \mathbf{true}_{A \times B} \text{ iff } \forall_A(f) = \mathbf{true}_B$$

Beweis: Nach Konstruktion ist $\forall_A(f)$ der charakteristische Morphismus des Equalizers der beiden Morphismen \overline{f} und $\overline{\mathbf{true}_{A \times B}}$. Nach Eindeutigkeit der Transponierten sind diese beiden Morphismen genau dann gleich, wenn f und $\mathbf{true}_{A \times B}$ gleich sind. Dies gilt aber genau dann, wenn der Equalizer $B \xrightarrow{Id} B$ ist. Natürlich ist der Equalizer genau dann $B \xrightarrow{Id} B$, wenn sein charakteristischer Morphismus \mathbf{true}_B ist. Also ergibt sich insgesamt: $\mathbf{true}_B = \forall_A(f)$ genau dann, wenn $f = \mathbf{true}_{A \times B}$. \square

Eine besonders nützliche Eigenschaft der Definition von Quantoren in einem Topos ist die sogenannte Beck-Chevalley-Gleichung. Diese erklärt den Zusammenhang zwischen Urbildern und Quantoren. Das nächste Lemma beweist die Beck-Chevalley-Gleichung für den Allquantor.

LEMMA 2.43. Seien $g : A \times B \rightarrow \Omega$ und $f : C \rightarrow B$ zwei Morphismen, dann gilt

$$\forall_A(g) \circ f = \forall_A(g \circ (Id \times f))$$

Beweis: Nach Konstruktion ist $\forall_A(g \circ (Id \times f))$ der charakteristische Morphismus des Equalizers von $\overline{g \circ (Id \times f)} : C \rightarrow \Omega^A$ und $\overline{\mathbf{true}_{A \times C}} : C \rightarrow \Omega^A$. Dann gilt nach Natürlichkeit der Transponierten, dass $\overline{g \circ (Id \times f)} = \overline{g} \circ f$. Sei also nun $e_1 : F_1 \hookrightarrow C$ der Equalizer der Morphismen $\overline{g} \circ f$ und $\overline{\mathbf{true}_{A \times C}}$. Wieder nach Konstruktion ist $\forall_A(g)$ der charakteristische Morphismus des Equalizers $e_2 : F_2 \hookrightarrow B$ der Morphismen \overline{g} und $\overline{\mathbf{true}_{A \times B}}$. Da nun gilt

$$\overline{g} \circ f \circ e_1 = \overline{\mathbf{true}_{A \times C}} \circ e_1 = \overline{\mathbf{true}_{A \times B}} \circ f \circ e_1,$$

gibt es einen Morphismus $h : F_1 \rightarrow F_2$ mit $e_2 \circ h = f \circ e_1$.

(2) Das folgende Diagramm ist ein Pullback-Quadrat:

$$\begin{array}{ccc} F_1 & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow e_1 & & \downarrow \mathbf{true} \\ C & \xrightarrow{\forall_A(g) \circ f} & \Omega \end{array}$$

Beweis: Zuerst zeigen wir, dass das obige Diagramm kommutiert. Nach Definition von h gilt aber, dass

$$\begin{aligned} \forall_A(g) \circ f \circ e_1 &= \forall_A(g) \circ e_2 \circ h \\ &= \mathbf{true}_{F_2} \circ h \\ &= \mathbf{true}_{F_1}. \end{aligned}$$

Also kommutiert das obige Diagramm. Sei nun ein Morphismus $l : D \rightarrow C$ gegeben mit $\forall_A(g) \circ f \circ l = \mathbf{true}_D$. Dann gibt genau einen Morphismus $l_1 : D \rightarrow F_2$ mit

$e_2 \circ l_1 = f \circ l$. Nach Definition von e_2 impliziert diese Gleichheit, dass $\bar{g} \circ f \circ l = \mathbf{true}_{A \times B} \circ f \circ l$ gilt. Damit gilt dann auch

$$\bar{g} \circ f \circ l = \overline{\mathbf{true}_{A \times C}} \circ l.$$

Nach Definition von e_1 gibt es dann genau einen Morphismen $l_2 : D \rightarrow F_1$, so dass $e_1 \circ l_2 = l$. Damit ist das obige Diagramm ein Pullback-Quadrat.

□(2)

Damit erhalten wir also aus (2), dass der charakteristische Morphismus von e_1 gerade $\forall_A(g) \circ f$ ist. Da aber $\forall_A(g \circ (Id \times f))$ schon der charakteristische Morphismus von e_1 ist, gilt daher $\forall_A(g) \circ f = \forall_A(g \circ (Id \times f))$.

□

SATZ 2.44. Sei $g : A \times B \rightarrow \Omega$ und $f : B \rightarrow \Omega$ zwei Morphismen, dann gilt

$$f \circ \pi_B \leq g \text{ iff } f \leq \forall_A(g).$$

Beweis: Sei nun $s : S \hookrightarrow B$ das Unterobjekt von B , welches zu f gehört. Nach Satz 2.28 folgt, dass $f \leq \forall_A(g)$ genau dann gilt, wenn $\forall_A(g) \circ s = \mathbf{true}_B$. Nach der Beck-Chevalley-Gleichung aus Lemma 2.43 erhalten wir nun

$$\forall_A(g) \circ s = \forall_A(g \circ (Id \times s)).$$

Nach Lemma 2.42 ist dieser Morphismus genau dann gleich \mathbf{true}_B , wenn $g \circ (Id \times s) = \mathbf{true}_{A \times B}$. Da nun $Id \times S : A \times S \hookrightarrow A \times B$ das zu $f \circ \pi_B$ gehörige Unterobjekt ist, gilt nach Satz 2.28 $g \circ (Id \times s) = \mathbf{true}_{A \times B}$ genau dann, wenn $f \circ \pi_B \leq g$.

□

Dieser Satz ist nicht nur ein Hilfsmittel für spätere Anwendung, sondern ist auch für sich selber gesehen interessant. Er zeigt, dass man \forall als Adjunktion zwischen $Hom_{\mathcal{E}}(A \times B, \Omega)$ und $Hom_{\mathcal{E}}(B, \Omega)$ betrachten kann: Der letzte Satz sagt doch gerade, dass \forall der rechtsadjungierte zu $\circ \pi_B : Hom_{\mathcal{E}}(B, \Omega) \rightarrow Hom_{\mathcal{E}}(A \times B, \Omega)$ ist. Wir werden noch sehen, dass die Interpretation des Existenzquantors gerade der linksadjungierte zu $\circ \pi_B$ sein wird. Bevor wir uns jedoch dem Existenzquantor zu wenden, betrachten wir noch eine Folgerung aus der Beck-Chevalley-Gleichung. Diese Folgerung zeigt uns, wie sich der Allquantor verhält, wenn wir nur über einen Teilbereich quantifizieren wollen.

FOLGERUNG 2.45. Seien $g : A \times B \rightarrow \Omega$, $f : A \rightarrow \Omega$ zwei Morphismen und $s : S \hookrightarrow A$ das zu f gehörige Unterobjekt von A , dann gilt

$$\forall_A((f \circ \pi_A) \Rightarrow g) = \forall_S(g \circ (s \times Id))$$

Beweis: Wir werden nun für alle Morphismen $h : D \rightarrow B$ zeigen, dass $\forall_A((f \circ \pi_A) \Rightarrow g) \circ h = \mathbf{true}_D$ genau dann gilt, wenn $\forall_S(g \circ (s \times Id)) \circ h = \mathbf{true}_D$ gilt. Nach Satz 2.28 und der Antisymmetrie von \leq folgt dann die behauptete Gleichheit. Nach der Beck-Chevalley-Gleichung aus Satz 2.43, erhalten wir die Gleichung

$$\begin{aligned} \forall_A((f \circ \pi_A) \Rightarrow g) \circ h &= \forall_A((f \circ \pi_A) \Rightarrow g) \circ (Id \times h) \\ &= \forall_A((f \circ \pi_A) \Rightarrow (g \circ (Id \times h))), \end{aligned}$$

und die Gleichung

$$\begin{aligned} \forall_S(g \circ (s \times Id)) \circ h &= \forall_S(g \circ (s \times Id) \circ (Id \times h)) \\ &= \forall_S(g \circ (s \times h)). \end{aligned}$$

Nach Lemma 2.42 gilt die Gleichung $\forall_A((f \circ \pi_A) \Rightarrow (g \circ (Id \times h))) = \mathbf{true}_D$ genau dann, wenn $(f \circ \pi_A) \Rightarrow (g \circ (Id \times h)) = \mathbf{true}_{A \times D}$ gilt. Nach Lemma 2.32 gilt wiederum $(f \circ \pi_A) \Rightarrow (g \circ (Id \times h)) = \mathbf{true}_{A \times D}$ genau dann, wenn $f \circ \pi_A \leq g \circ (Id \times h)$ gilt. Das zu $f \circ \pi_A$ gehörige Unterobjekt von $A \times D$ ist bekanntlich $s \times Id : S \times D \hookrightarrow A \times D$. Nach Satz 2.28 gilt $f \circ \pi_A \leq g \circ (Id \times h)$ genau dann, wenn $g \circ (Id \times h) \circ (s \times Id) = \mathbf{true}_{S \times D}$ gilt. Dies wiederum gilt natürlich genau dann, wenn $g \circ (s \times h) = \mathbf{true}_{S \times D}$ gilt. Nach Lemma 2.42 gilt dies nun genau dann, wenn $\forall_S(g \circ (s \times h)) = \mathbf{true}_D$.

□

Wenden wir uns also nun dem Existenzquantor zu. Betrachten wir dafür wieder zur Veranschaulichung der folgenden Konstruktion das obige mengentheoretische Beispiel. Sei also $D \subset M \times N$ wieder die Menge $\{(m, n) \in M \times N \mid \varphi(m, n)\}$. Ferner sei $F := \{n \in N \mid \exists m \in M \varphi(m, n)\}$. Dann ist F gerade das Bild von D unter Projektion π . Da wir schon den Begriff des Bildes in einem Topos kennen, definieren wir wie folgt:

DEFINITION 2.46. Sei $m : E \hookrightarrow A \times B$ ein Unterobjekt von $A \times B$, dann sei $\exists_A(m)$ das Bild von m unter π_B , also als das Bild von $\pi_B \circ m$.

Natürlich definieren wir für einen Morphismus $f : A \times B \rightarrow \Omega$ mit zugehörigen Unterobjekt $m : E \hookrightarrow A \times B$, dass $\exists_A(f)$ der charakteristische Morphismus von $\exists_A(m)$ ist.

Zuerst wollen wir die Funktorialität von \exists beweisen: Seien $f, g : A \times B \rightarrow \Omega$ zwei Morphismen und gelte $f \leq g$. Seien nun $s = (s_1, s_2) : S \hookrightarrow A \times B$ und $t = (t_1, t_2) : T \hookrightarrow A \times B$ die zwei zugehörigen Unterobjekte von $A \times B$. Dann gibt es einen Morphismus $i : S \rightarrow T$ mit $t \circ i = s$. Dann gilt ebenfalls $t_2 \circ i = s_2$. Sei nun $m : I \hookrightarrow B$ Bild von s_2 und $n : J \hookrightarrow B$, $d : T \rightarrow J$ die Bildzerlegung von t_2 . Dann gilt $n \circ d \circ i = s_2$. Nach der Definition des Bildes ist aber m das kleinste Unterobjekt von B , durch welches s_2 faktorisiert. Damit ist also m kleiner als n . Da gerade $\exists_A(f)$ und $\exists_A(g)$ die charakteristischen Morphismen von m und n sind und erhalten wir damit $\exists_A(f) \leq \exists_A(g)$. Wir haben also bewiesen:

LEMMA 2.47. Seien $f, g : A \times B \rightarrow \Omega$ zwei Morphismen mit $f \leq g$, dann gilt $\exists_A(f) \leq \exists_A(g)$.

In Lemma 2.42 haben wir gezeigt, wie interne und externe Logik im Fall des Allquantor zusammenpassen. Ein ähnliches Ergebnis erhalten wir auch für den Fall des Existenzquantors.

LEMMA 2.48. Seien $f : A \times B \rightarrow \Omega$ und $g : B \rightarrow \Omega$ zwei Morphismen mit $f \circ (g, Id_B) = \mathbf{true}_B$, dann gilt $\exists_A(f) = \mathbf{true}_B$.

Beweis: Gelte also $f \circ (g, Id_B) = \mathbf{true}_B$. Ferner sei $s = (s_1, s_2) : S \hookrightarrow A \times B$ das zu f gehörige Unterobjekt von $A \times B$. Dann gibt es einen Morphismus $h : B \rightarrow S$ mit $(g, Id_B) \circ s = h$. Damit gilt insbesondere, dass $Id_B = s_2 \circ h$ und daher dass s_2 ein Epimorphismus ist. Damit ist die Bildzerlegung von s_2 gerade $Id \circ s_2$ und Id_B ist das Bild von s_2 . Daher ist der charakteristische Morphismus dieses Bildes natürlich \mathbf{true}_B . Doch dies ist gerade nach Definition von s und nach der Definition der Interpretation des Existenzquantor der Morphismus $\exists_A(f)$.

□

Nachdem wir oben bereits die Beck-Chevalley-Gleichung für \forall aufgestellt und bewiesen haben, holen wir dies nun auch für \exists nach:

LEMMA 2.49. Seien $g : A \times B \rightarrow \Omega$ und $f : C \rightarrow B$ zwei Morphismen, dann gilt

$$\exists_A(g) \circ f = \exists_A(g \circ (Id \times f))$$

Beweis: Sei $t = (t_1, t_2) : T \hookrightarrow A \times B$ das zu g gehörige Unterobjekt. Wir bilden den Pullback von f und t_2 :

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{k_1} & T \\ \downarrow k_2 & & \downarrow t_2 \\ C & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Sei $m : I \hookrightarrow C$ das Bild von k_2 und $n : J \hookrightarrow B$ das Bild von t_2 . Dann ist nach Lemma 2.26 das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & J \\ \downarrow m & & \downarrow n \\ C & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

ein Pullback-Quadrat. Nach Definition ist n gerade das zu $\exists_A(g)$ gehörige Unterobjekt. Nach Lemma 2.17 ist dann m das zu $\exists_A(g) \circ f$ gehörige Unterobjekt von C .

(3) Das folgende Diagramm ist ein Pullback-Quadrat:

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{k_1} & T \\ \downarrow (t_1 \circ k_1, k_2) & & \downarrow t \\ A \times C & \xrightarrow{Id \times f} & A \times B \end{array}$$

Beweis: Aus der Definition von k_1 und k_2 folgt direkt, dass das obige Diagramm kommutiert. Seien also zwei Morphismen $l : D \rightarrow T$ und $j = (j_1, j_2) : D \rightarrow A \times B$ gegeben mit $t \circ l = (Id \times f) \circ j$. Dann gilt $j_1 = t_1 \circ l$ und $f \circ j_2 = t_2 \circ l$. Nach der Pullback-Definition von k_1 und k_2 erhalten wir aus der letzteren Gleichung, dass es genau einen Morphismus $p : D \rightarrow P$ gibt mit $k_1 \circ p = l$ und $k_2 \circ p = j_2$. Dann gilt für dieses p auch

$$\begin{aligned} (t_1 \circ k_1, k_2) \circ p &= (t_1 \circ k_1 \circ p, k_2 \circ p) \\ &= (t_1 \circ l, j_2) \\ &= (j_1, j_2). \end{aligned}$$

Da p der einzige Morphismus mit $k_1 \circ p = l$, ist das obige Diagramm ein Pullback-Quadrat.

□(3)

Damit ist nach (3) und nach Lemma 2.17 $(t_1 \circ k_1, k_2)$ das zu $g \circ (Id \times f)$ gehörige Unterobjekt. Nach Definition ist dann das Bild von k_2 das zu $\exists_A(g \circ (Id \times f))$ gehörige Unterobjekt. Das Bild von k_2 ist aber gerade m . Damit gilt nach Eindeutigkeit des charakteristischen Morphismus, dass $\exists_A(g) \circ f = \exists_A(g \circ (Id \times f))$.

□

FOLGERUNG 2.50. Seien $g : A \times B \rightarrow \Omega$, $f : A \rightarrow \Omega$ zwei Morphismen und $s : S \hookrightarrow A$ das zu f gehörige Unterobjekt von A , dann gilt

$$\exists_A((f \circ \pi_A) \wedge g) = \exists_S(g \circ (s \times Id))$$

Beweis: Um diese Aussage zu zeigen, müssen wir uns mit den entsprechenden Unterobjekten beschäftigen. Sei dafür $t : T \hookrightarrow A \times B$ das zu g gehörige Unterobjekt von $A \times B$. Nach Satz 2.17, ist dann das zu $g \circ (s \times Id)$ gehörige Unterobjekt der folgende Pullback:

$$\begin{array}{ccc} Q & \longrightarrow & T \\ \downarrow (q_1, q_2) & & \downarrow t \\ S \times B & \xrightarrow{s \times Id} & A \times B \end{array}$$

Damit erhalten wir, dass $\exists_S(g \circ (s \times Id))$ das Bild von q_2 ist.

Da $s \times Id : S \times B \hookrightarrow A \times B$ das zu $f \circ \pi_A$ gehörige Unterobjekt ist, ist nach Lemma 2.29 $(s \times Id) \circ (q_1, q_2)$ das zu $(f \circ \pi_A) \wedge g$ gehörige Unterobjekt. Dann ist $\exists_A((f \circ \pi_A) \wedge g)$ das Bild von $\pi_B \circ (s \times Id) \circ (q_1, q_2)$, also ebenfalls das Bild von q_2 . Damit sind auch die entsprechenden charakteristischen Morphismen gleich. \square

Wir schließen nun diesen Abschnitt mit einem schon erwähnten Result ab. Wir hatten in Satz 2.44 bereits gesehen, dass wir \forall als Rechtsadjungierten zu $\circ\pi$ sehen können. Jetzt wird bewiesen, dass \exists auch die Linksadjungierte von $\circ\pi$ ist. Da Links- und Rechtsadjungierte, falls sie existieren, bis Isomorphie eindeutig bestimmt sind, hätte man die Interpretation von \forall und \exists auch über diesen Begriff definieren. Es ist erstaunlich, dass es einen so engen Zusammenhang zwischen den rudimentären Begriffen der Adjunktion und des Quantors gibt.

SATZ 2.51. Sei $g : A \times B \rightarrow \Omega$ und $f : B \rightarrow \Omega$ zwei Morphismen, dann gilt

$$g \leq f \circ \pi_B \text{ genau dann, wenn } \exists_A(g) \leq f.$$

Beweis: Sei $s : S \hookrightarrow B$ das zu f gehörige Unterobjekt von B und $t = (t_1, t_2) : T \hookrightarrow A \times B$ entsprechende für g . Dann gilt nach Satz 2.28, dass $g \leq f \circ \pi_B$ genau dann gilt, wenn $f \circ \pi_B \circ t = \mathbf{true}_T$. Die Gleichung gilt nun wieder offensichtlich genau dann, wenn $f \circ t_2 = \mathbf{true}_T$. Sei nun $c : T \rightarrow I, m : I \hookrightarrow B$ die Bildzerlegung von t_2 . Nach Definition ist $\exists_A(g)$ gerade der charakteristische Morphismus von m . Also gilt nach Satz 2.28 $\exists_A(g) \leq f$ genau dann, wenn $f \circ m = \mathbf{true}_I$. Es verbleibt also nur noch der Beweis von:

$$(4) \quad f \circ m = \mathbf{true}_I \text{ genau dann, wenn } f \circ t_2 = \mathbf{true}_T.$$

Beweis: Angenommen, dass $f \circ m = \mathbf{true}_I$. Da nach Definition $m \circ c = f$ gilt, erhalten wir

$$\begin{aligned} f \circ t_2 &= f \circ m \circ c \\ &= \mathbf{true}_I \circ c \\ &= \mathbf{true}_T. \end{aligned}$$

Gelte umgekehrt, dass $f \circ t_2 = \mathbf{true}_T$. Dann erhalten wir ähnlich wie oben, dass

$$\begin{aligned} \mathbf{true}_I \circ c &= \mathbf{true}_T \\ &= f \circ t_2 \\ &= f \circ m \circ c. \end{aligned}$$

Da aber c ein Epimorphismus ist, gilt dann $f \circ m = \mathbf{true}_I$.

$\square(4)$

\square

4. Interne Quantoren

Im letzten Abschnitt haben wir eine externe Interpretation des Existenzquantor definiert. Extern im dem Sinne, dass die Interpretation des Existenzquantor eine Abbildung zwischen zwei Mengen ist. In unserem Fall also eine Abbildung zwischen $Hom_{\mathcal{E}}(A \times B, \Omega)$ und $Hom_{\mathcal{E}}(B, \Omega)$. Wir werden nun noch kurz ein entsprechende interne Interpretation als Morphismus in \mathcal{E} angeben.

Sei nun ein beliebiger Monomorphismus $n : A \hookrightarrow B$ gegeben. Wir werden nun den Morphismus $\exists_n : \Omega^A \rightarrow \Omega^B$ definieren. Sei $s : S \hookrightarrow A \times \Omega^A$ das zu ev_A gehörige Unterobjekt und ferner sei e_n der charakteristische Morphismus von $(n \times Id) \circ s$, maW. der einzige Morphismus der folgendes Diagramm

$$\begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow s & & \downarrow \mathbf{true} \\ A \times \Omega^A & & \Omega \\ \downarrow n \times Id & \xrightarrow{e_n} & \downarrow \\ B \times \Omega^A & \longrightarrow & \Omega \end{array}$$

zu einem Pullback-Quadrat macht. Man beachte, dass für jeden Morphismus $f : D \rightarrow A \times \Omega^A$ mit $e_n \circ (n \times Id) \circ f = \mathbf{true}_D$, es nach Definition genau einen weiteren Morphismus $h : D \rightarrow S$ mit $(n \times Id) \circ s \circ h = (n \times Id) \circ f$ gibt. Da aber $(n \times Id)$ ein Monomorphismus ist, erhalten wir $s \circ h = f$. Damit ist also

$$\begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow s & & \downarrow \mathbf{true} \\ A \times \Omega^A & \xrightarrow{n \times Id} & B \times \Omega^A \xrightarrow{e_n} \Omega \end{array}$$

ebenfalls ein Pullback-Quadrat und nach der Eindeutigkeit des charakteristischen Morphismus, gilt dann also

$$(4.1) \quad ev_A = e_n \circ (n \times Id).$$

Wir definieren jetzt \exists_n als die Transponierte von e_n . Also als den einzigen Morphismus, der das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} B \times \Omega^A & & \\ Id \times \exists_n \downarrow & \searrow e_n & \\ B \times \Omega^B & \xrightarrow{ev_B} & \Omega \end{array}$$

kommutativ macht. Wir wollen nun zeigen, dass \exists_n ein Monomorphismus. Dafür definieren wir sein Linksinverses. Wir sagen, dass $P(n) : \Omega^B \rightarrow \Omega^A$ die Transponierte von $ev_B \circ (n \times Id)$ ist; also der Morphismus der folgendes Diagramm kommutieren lässt:

$$\begin{array}{ccc} A \times \Omega^B & \xrightarrow{n \times Id} & B \times \Omega^B \\ Id \times P(n) \downarrow & & \downarrow ev_B \\ A \times \Omega^A & \xrightarrow{ev_A} & \Omega \end{array}$$

Mittels dieser beiden Definitionen und Gleichung (4.1) erhalten wir, dass

$$\begin{aligned} ev_A \circ (Id \times (P(i_A) \circ \exists_n)) &= ev_B \circ (n \times \exists_{i_A}) \\ &= ev_B \circ (Id \times \exists_n) \circ (n \times Id) \\ &= e_n \circ (n \times Id) \\ &= ev_A. \end{aligned}$$

Da Id_A die Transponierte von ev_A ist und die Transponierte eindeutig bestimmt ist, gilt also insgesamt

$$(4.2) \quad P(n) \circ \exists_n = Id_A.$$

Daraus folgt also:

FOLGERUNG 2.52. Sei $n : A \hookrightarrow B$ ein Monomorphismus, dann ist $\exists_n : \Omega^A \rightarrow \Omega^B$ ebenfalls ein Monomorphismus.

Weiterhin gilt für den in der Konstruktion verwendeten Morphismus e_n noch eine gewissen Natürlichkeitsaussage.

LEMMA 2.53. Seien $n : A \hookrightarrow B$ und $m : B \hookrightarrow C$ zwei Monomorphismen, dann gilt $e_n = e_{mon} \circ (m \times Id)$.

Beweis: Wir beweisen, dass

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ \downarrow s & & \downarrow \mathbf{true} \\ A \times \Omega^A & & \Omega \\ \downarrow n \times Id & \xrightarrow{e_{mon} \circ (m \times Id)} & \downarrow \\ B \times \Omega^A & \xrightarrow{\quad} & \Omega \end{array}$$

ein Pullback-Quadrat. Nach Definition von e_{mon} gilt

$$\begin{aligned} e_{mon} \circ (m \times Id) \circ (n \times Id) \circ s &= e_{mon} \circ (m \circ n \times Id) \circ s \\ &= \mathbf{true}_S \end{aligned}$$

und damit kommutiert das obige Diagramm. Sei nun ein Morphismus $f = (f_1, f_2) : D \rightarrow B \times \Omega^A$ mit $e_{mon} \circ (m \times Id) \circ f = \mathbf{true}_D$ gegeben. Wiederum nach Definition von e_{mon} gibt es dann einen Morphismus $g : D \rightarrow S$ mit $(m \circ n \times Id) \circ s \circ g = (m \times Id) \circ f$. Da $m \times Id$ ein Monomorphismus ist, gilt also $(n \times Id) \circ s \circ g = f$. Damit ist das obige Diagramm ein Pullback-Quadrat. \square

Als letztes wollen wir nun noch die Funktiorialität von \exists beweisen. Dafür benötigen wir folgendes Lemma:

LEMMA 2.54. Sei $g : B \times A \rightarrow \Omega$ ein Morphismus mit zugehörigen Unterobjekt $l : R \hookrightarrow B \times A$, $m : B \hookrightarrow C$ ein Monomorphismus, dann ist die Transponierte des charakteristischen Morphismus von $(m \times Id) \circ l$ gerade $\exists_m \circ \bar{g}$.

Beweis: Nach Definition ist \exists_m gerade die Transponierte von e_m . Nach Natürlichkeit der Transponierte ist dann $\exists_m \circ \bar{g}$ die Transponierte von $e_m \circ (Id \times \bar{g})$. Es bleibt

also nur noch zu zeigen, dass $e_m \circ (Id \times \bar{g})$ der charakteristische Morphismus von $(m \times Id) \circ l$ ist. Dafür müssen wir gerade zeigen, dass das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 R & \xrightarrow{\quad} & 1 \\
 \downarrow l & & \downarrow \mathbf{true} \\
 B \times A & & \\
 \downarrow m \times Id & & \\
 C \times A & \xrightarrow{e_m \circ (Id \times \bar{g})} & \Omega
 \end{array}$$

ein Pullback-Quadrat ist. Zuerst zeigen wir, dass obige Diagramm wirklich kommutativ ist. Nach Gleichung (4.1) erhalten wir

$$\begin{aligned}
 e_m \circ (Id \times \bar{g}) \circ (m \times Id) \circ l &= e_m \circ (m \times Id) \circ (Id \times \bar{g}) \circ l \\
 &= ev_B \circ (Id \times \bar{g}) \circ l \\
 &= g \circ l \\
 &= \mathbf{true}_R.
 \end{aligned}$$

Sei nun $f = (f_1, f_2) : D \rightarrow C \times A$ ein Morphismus mit $e_m \circ (Id \times \bar{g}) \circ f = \mathbf{true}_D$. Sei $s' = (s'_1, s'_2) : S' \hookrightarrow B \times \Omega^B$ das zu ev_B gehörige Unterobjekt von $B \times \Omega^B$. Dann gibt es nach Definition von e_m einen Morphismus $h : D \rightarrow S'$ mit $(m \times Id) \circ s' \circ h = (Id \times \bar{g}) \circ f$. Dann gilt $f_1 = m \circ s'_1 \circ h$. Damit gilt ferner

$$\begin{aligned}
 (m \times Id) \circ s' \circ h &= (Id \times \bar{g}) \circ f = (Id \times \bar{g}) \circ (f_1, f_2) \\
 &= (m \times \bar{g}) \circ (s'_1 \circ h, f_2) \\
 &= (m \times Id) \circ (Id \times \bar{g}) \circ (s'_1 \circ h, f_2).
 \end{aligned}$$

Da aber $m \times Id$ ein Monomorphismus ist, gilt damit $s' \circ h = (Id \times \bar{g}) \circ (s'_1 \circ h, f_2)$. Nach Definition von s' erhalten wir dann

$$\begin{aligned}
 g \circ (s'_1 \circ h, f_2) &= ev_B \circ (Id \times \bar{g}) \circ (s'_1 \circ h, f_2) \\
 &= ev_B \circ s' \circ h \\
 &= \mathbf{true}_D.
 \end{aligned}$$

Also gibt es einen Morphismus $g_1 : D \rightarrow R$ mit $l \circ g_1 = (s'_1 \circ h, f_2)$ und damit einen Morphismus mit $(m \times Id) \circ l \circ g_1 = (f_1, f_2)$. Damit ist das obige Diagramm ein Pullback-Quadrat. □

SATZ 2.55. Seien $n : A \hookrightarrow B$ und $m : B \hookrightarrow C$ zwei Monomorphismen, dann gilt $\exists_{m \circ n} = \exists_m \circ \exists_n$.

Beweis: Wir benutzen nun vorheriges Lemma 2.54, um die Behauptung zu zeigen. Nach Definition ist \exists_n die Transponierte von e_n . e_n wiederum ist der charakteristische Morphismus des Unterobjekt $(m \times Id) \circ s$, wobei $s : S \hookrightarrow A \times \Omega^A$ weiterhin das zu ev_A gehörige Unterobjekt ist. Damit ist nach Lemma 2.54 gerade $\exists_m \circ \exists_n$ die Transponierte des charakteristischen Morphismus von $(m \circ n \times Id) \circ s$. Der charakteristische Morphismus des Unterobjekt ist aber gerade $e_{n \circ m}$. Damit gilt also $\exists_{m \circ n} = \exists_m \circ \exists_n$. □

Topostheoretische Modelle der Mengenlehre

1. Logik und Modelle in einem Topos

Im zweiten Kapitel haben wir bereits alle Voraussetzungen kennengelernt, die wir nun brauchen, um Logik in einem Topos zu interpretieren. Die Morphismen $=_\Omega, \Rightarrow, \wedge$ und \vee von $\Omega \times \Omega$ nach Ω bietet sich ja gerade an, um sie als Interpretation der entsprechenden logischen Symbole zu nutzen.

Sei nun $\sigma = (S, F, R, K, fct)$ eine Signatur. Eine σ -Struktur \mathfrak{A} ist ein Quadrupel bestehend aus Abbildungen $\mathfrak{A}_S : S \rightarrow ob(\mathcal{E})$, $\mathfrak{A}_F : F \rightarrow mor(\mathcal{E})$, $\mathfrak{A}_R : R \rightarrow mor(\mathcal{E})$ und $\mathfrak{A}_K : K \rightarrow mor(\mathcal{E})$, so dass

(i) für alle $f \in F$ mit $fct(f) = (s_0, \dots, s_n)$, gilt

$$\prod_{i=0}^{n-1} \mathfrak{A}_S(s_i) \xrightarrow{\mathfrak{A}_F(f)} \mathfrak{A}_S(s_n),$$

(ii) für alle $r \in R$ mit $fct(r) = (s_0, \dots, s_n)$, gilt

$$\prod_{i=0}^n \mathfrak{A}_S(s_i) \xrightarrow{\mathfrak{A}_R(r)} \Omega,$$

(iii) für alle $k \in K$ mit $fct(k) = s$, gilt

$$1 \xrightarrow{\mathfrak{A}_K(k)} \mathfrak{A}_S(s).$$

Als nächstes definieren wir die Interpretation von σ -Termen in einer Struktur \mathfrak{A} . Sei $t \in T^\sigma$ ein σ -Term und $\vec{x} = (x_1, \dots, x_m)$ ein Tupel von Variablen, das alle Variablen von t enthält. Wir definieren dann $\mathfrak{A}_{\vec{x}}(t)$ rekursiv:

(i) $t = x_j$: wir definieren $\mathfrak{A}_{\vec{x}}(t)$ als die Projektion auf das j -te Objekt

$$\prod_{\vec{x}} \mathfrak{A}_S(\tau(x_i)) \xrightarrow{\pi_j} \mathfrak{A}_S(\tau(x_j)),$$

(ii) $t = k$: wir definieren $\mathfrak{A}_{\vec{x}}(t)$ als die Verknüpfung

$$\prod_{\vec{x}} \mathfrak{A}_S(\tau(x_i)) \xrightarrow{!} 1 \xrightarrow{\mathfrak{A}_K(k)} \mathfrak{A}_S(fct(k)),$$

(iii) $t = f(t_1, \dots, t_n)$: wir definieren $\mathfrak{A}_{\vec{x}}(t)$ als die Verknüpfung

$$\prod_{\vec{x}} \mathfrak{A}_S(\tau(x_i)) \xrightarrow{(\mathfrak{A}_{\vec{x}}(t_1), \dots, \mathfrak{A}_{\vec{x}}(t_n))} \prod_{i=1}^n \mathfrak{A}_S(\tau(t_i)) \xrightarrow{\mathfrak{A}_F(f)} \mathfrak{A}_S(fct(f)).$$

Natürlich steht im obigen $\prod_{\vec{x}} \mathfrak{A}_S(\tau(x_i))$ für $\prod_{i=1}^m \mathfrak{A}_S(\tau(x_i))$. Man beachte, dass wir in dieser Konstruktion für jede Kombination von Sorten wieder ein Produkt auswählen. Welches wir aussuchen ist jedoch für das folgende gleichgültig, da zwei Produkte der gleichen Objekte bekanntlich nach dem Yoneda-Lemma isomorph

sind. Gleiches gilt natürlich auch für die Wahl des Unterobjektklassifizierers Ω . Siehe hierzu auch die Bemerkung am Ende der Einleitung.

Sei nun also $\varphi \in Fml^\sigma$ ein σ -Formel und \vec{x} ein Tupel von Variablen, das alle freien Variablen von φ enthält. Wir definieren rekursiv über den Formelaufbau:

(i) $\varphi = r(t_1, \dots, t_n)$: $\llbracket \varphi \rrbracket_{\vec{x}}^{\mathfrak{A}}$ ist der Morphismus

$$\prod_{\vec{x}} \mathfrak{A}_S(\tau(x_i)) \xrightarrow{(\mathfrak{A}_{\vec{x}(t_1)}, \dots, \mathfrak{A}_{\vec{x}(t_n)})} \prod_{i=1}^n \mathfrak{A}_S(\tau(t_i)) \xrightarrow{\mathfrak{A}_R(r)} \Omega.$$

(ii) $\varphi = t_1 = t_2$: $\llbracket \varphi \rrbracket_{\vec{x}}^{\mathfrak{A}}$ ist der Morphismus

$$\prod_{\vec{x}} \mathfrak{A}_S(\tau(x_i)) \xrightarrow{(\mathfrak{A}_{\vec{x}(t_1)}, \mathfrak{A}_{\vec{x}(t_2)})} \mathfrak{A}_S(\tau(t_1)) \times \mathfrak{A}_S(\tau(t_2)) \xrightarrow{=_{\mathfrak{A}_S(\tau(t_1)) \times \mathfrak{A}_S(\tau(t_2))}} \Omega.$$

(iii) $\varphi = \psi \wedge \chi$: $\llbracket \varphi \rrbracket_{\vec{x}}^{\mathfrak{A}}$ ist der Morphismus

$$\prod_{\vec{x}} \mathfrak{A}_S(\tau(x_i)) \xrightarrow{(\llbracket \psi \rrbracket_{\vec{x}}^{\mathfrak{A}}, \llbracket \chi \rrbracket_{\vec{x}}^{\mathfrak{A}})} \Omega \times \Omega \xrightarrow{\wedge} \Omega.$$

(iv) $\varphi = \psi \vee \chi$: $\llbracket \varphi \rrbracket_{\vec{x}}^{\mathfrak{A}}$ ist der Morphismus

$$\prod_{\vec{x}} \mathfrak{A}_S(\tau(x_i)) \xrightarrow{(\llbracket \psi \rrbracket_{\vec{x}}^{\mathfrak{A}}, \llbracket \chi \rrbracket_{\vec{x}}^{\mathfrak{A}})} \Omega \times \Omega \xrightarrow{\vee} \Omega.$$

(v) $\varphi = \psi \Rightarrow \chi$: $\llbracket \varphi \rrbracket_{\vec{x}}^{\mathfrak{A}}$ ist der Morphismus

$$\prod_{\vec{x}} \mathfrak{A}_S(\tau(x_i)) \xrightarrow{(\llbracket \psi \rrbracket_{\vec{x}}^{\mathfrak{A}}, \llbracket \chi \rrbracket_{\vec{x}}^{\mathfrak{A}})} \Omega \times \Omega \xrightarrow{\Rightarrow} \Omega.$$

(vi) $\varphi = \forall_s x_j \psi$, wobei s die Sorte von x_j ist: $\llbracket \varphi \rrbracket_{\vec{x}}^{\mathfrak{A}}$ ist der Morphismus

$$\prod_{\vec{x}} \mathfrak{A}_S(\tau(x_i)) \xrightarrow{\forall_{\mathfrak{A}_S(s)}(\llbracket \psi \rrbracket_{(\vec{x}, x_j)}^{\mathfrak{A}})} \Omega.$$

(vii) $\varphi = \exists_s x_j \psi$, wobei s die Sorte von x_j ist: $\llbracket \varphi \rrbracket_{\vec{x}}^{\mathfrak{A}}$ ist der Morphismus

$$\prod_{\vec{x}} \mathfrak{A}_S(\tau(x_i)) \xrightarrow{\exists_{\mathfrak{A}_S(s)}(\llbracket \psi \rrbracket_{(\vec{x}, x_j)}^{\mathfrak{A}})} \Omega.$$

(viii) $\varphi = \top$: $\llbracket \varphi \rrbracket_{\vec{x}}^{\mathfrak{A}}$ ist der Morphismus

$$\prod_{\vec{x}} \mathfrak{A}_S(\tau(x_i)) \xrightarrow{\mathbf{true}_{\prod_{\vec{x}} \mathfrak{A}_S(\tau(x_i))}} \Omega$$

(ix) $\varphi = \perp$: $\llbracket \varphi \rrbracket_{\vec{x}}^{\mathfrak{A}}$ ist der Morphismus

$$\prod_{\vec{x}} \mathfrak{A}_S(\tau(x_i)) \xrightarrow{\mathbf{false}_{\prod_{\vec{x}} \mathfrak{A}_S(\tau(x_i))}} \Omega$$

(x) $\varphi = x_i^s$, wobei $\mathfrak{A}_S(s) = \Omega$: $\llbracket \varphi \rrbracket_{\vec{x}}^{\mathfrak{A}}$ ist der Morphismus

$$\prod_{\vec{x}} \mathfrak{A}_S(\tau(x_i)) \xrightarrow{\pi_s} \Omega$$

Falls nun \mathcal{E} ein vollständiger Topos ist, wissen wir nach Satz 2.38, dass die betrachteten Heyting-Algebren ebenfalls vollständig sind. Wir wollen dort nun auch Formeln interpretieren, die unendliche Konjunktionen und Disjunktionen beinhalten. Wir nennen eine solche Formel eine σ_∞ -Formel. Wir ergänzen in diesem Fall die obige Definition durch:

(xi) $\varphi = \bigvee_{i \in I} \psi_i$, dann ist $\llbracket \varphi \rrbracket_{\vec{x}}^{\mathfrak{A}}$ der Morphismus

$$\prod_{\vec{x}} \mathfrak{A}_S(\tau(x_i)) \xrightarrow{(\llbracket \psi_1 \rrbracket_{\vec{x}}^{\mathfrak{A}}, \dots, \llbracket \psi_1 \rrbracket_{\vec{x}}^{\mathfrak{A}}, \dots)} \prod_{i \in I} \Omega \xrightarrow{\bigvee_I} \Omega.$$

(xii) $\varphi = \bigwedge_{i \in I} \psi_i$, dann ist $\llbracket \varphi \rrbracket_{\vec{x}}^{\mathfrak{A}}$ der Morphismus

$$\prod_{\vec{x}} \mathfrak{A}_S(\tau(x_i)) \xrightarrow{(\llbracket \psi_1 \rrbracket_{\vec{x}}^{\mathfrak{A}}, \dots, \llbracket \psi_1 \rrbracket_{\vec{x}}^{\mathfrak{A}}, \dots)} \prod_{i \in I} \Omega \xrightarrow{\bigwedge_I} \Omega.$$

Wir schreiben ab jetzt oft $\mathfrak{A}_S(\vec{x})$ für $\prod_{\vec{x}} \mathfrak{A}_S(\tau(x_i))$. Im letzten Kapitel haben wir schon einiges über diese Interpretation gelernt: Gelte $\llbracket \varphi \wedge \psi \rrbracket_{\vec{x}}^{\mathfrak{A}} = \mathbf{true}_{\mathfrak{A}_S(\vec{x})}$, dann gilt auch $\llbracket \varphi \rrbracket_{\vec{x}}^{\mathfrak{A}} = \llbracket \psi \rrbracket_{\vec{x}}^{\mathfrak{A}} = \mathbf{true}_{\mathfrak{A}_S(\vec{x})}$. Oder falls $\llbracket \varphi \Rightarrow \psi \rrbracket_{\vec{x}}^{\mathfrak{A}} = \mathbf{true}_{\mathfrak{A}_S(\vec{x})}$ gilt, dann gilt auch $\llbracket \varphi \rrbracket_{\vec{x}}^{\mathfrak{A}} \leq \llbracket \psi \rrbracket_{\vec{x}}^{\mathfrak{A}}$. Ferner impliziert Lemma 2.31, dass falls $\llbracket t_1 = t_2 \rrbracket_{\vec{x}}^{\mathfrak{A}}$ gilt, auch $\mathfrak{A}_{\vec{x}}(t_1) = \mathfrak{A}_{\vec{x}}(t_2)$ gilt. Es gibt offensichtlich noch eine ganze Reihe solcher Folgerung aus dem vorherigen Kapitel, die wir hier nicht alle ausführen wollen. Stattdessen beweisen wir nun die Natürlichkeit der Substitution :

LEMMA 3.1. Seien u, t zwei Terme und t sei von der gleichen Sorte wie x_1 . Enthalte ferne \vec{z} die in $u \frac{x_1}{t}$ und t vorkommenen Variablen, dann gilt

$$\mathfrak{A}_{\vec{z}}(u \frac{x_1}{t}) = \mathfrak{A}_{x_1, \vec{z}}(u) \circ (\mathfrak{A}_{\vec{z}}(t), Id_{\mathfrak{A}_S(\vec{z})}).$$

Beweis: Wir beweisen dieses Lemma via Induktion über den Termaufbau.
 $u = x_j$: Falls $x_j = x_1$, dann gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{x_1, \vec{z}}(u) \circ (\mathfrak{A}_{\vec{z}}(t), Id) &= \mathfrak{A}_{\vec{z}}(t) \\ &= \mathfrak{A}_{\vec{z}}(u \frac{x_1}{t}). \end{aligned}$$

Falls $x_j \neq x_1$, dann gilt $u \frac{x_1}{t} = u$ und damit

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{x_1, \vec{z}}(u) \circ (\mathfrak{A}_{\vec{z}}(t), Id) &= \pi_{x_j} \circ (\mathfrak{A}_{\vec{z}}(t), Id) \\ &= \mathfrak{A}_{\vec{z}}(u) \\ &= \mathfrak{A}_{\vec{z}}(u \frac{x_1}{t}). \end{aligned}$$

$u = k$: Direkt aus der Definition folgt, dass

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{x_1}(u) \circ (\mathfrak{A}_{\vec{z}}(t), Id) &= \mathfrak{A}_K(k) \circ! \circ (\mathfrak{A}_{\vec{z}}(t), Id) \\ &= \mathfrak{A}_K(k) \circ! \\ &= \mathfrak{A}_{\vec{z}}(u) \\ &= \mathfrak{A}_{\vec{z}}(u \frac{x_1}{t}). \end{aligned}$$

$u = f(t_1, \dots, t_n)$: Gelte die Aussage bereits für die Terme t_1, \dots, t_n , dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{x_1, \bar{z}}(u) \circ (\mathfrak{A}_{\bar{z}}(t), Id) &= \mathfrak{A}_F(f) \circ (\mathfrak{A}_{x_1, \bar{z}}(t_1), \dots, \mathfrak{A}_{x_1, \bar{z}}(t_n)) \circ (\mathfrak{A}_{\bar{z}}(t), Id) \\ &= \mathfrak{A}_F(f) \circ (\mathfrak{A}_{x_1, \bar{z}}(t_1) \circ (\mathfrak{A}_{\bar{z}}(t), Id), \dots, \mathfrak{A}_{x_1, \bar{z}}(t_n) \circ (\mathfrak{A}_{\bar{z}}(t), Id)) \\ &= \mathfrak{A}_F(f) \circ (\mathfrak{A}_{\bar{z}}(t_1 \frac{x_1}{t}), \dots, \mathfrak{A}_{\bar{z}}(t_n \frac{x_1}{t})) \\ &= \mathfrak{A}_{\bar{z}}(u \frac{x_1}{t}). \end{aligned}$$

□

SATZ 3.2. Sei φ eine σ_∞ -Formel mit freier Variable x_1 und sei t ein Term gleichen Types wie x_1 . Ferner enthalte t keine gebundene Variable aus φ und \bar{z} beinhalte alle freien Variablen von $\varphi(t)$ und t . Dann gilt

$$\llbracket \varphi(t) \rrbracket_{\bar{z}}^{\mathfrak{A}} = \llbracket \varphi \rrbracket_{x_1, \bar{z}}^{\mathfrak{A}} \circ (\mathfrak{A}_{\bar{z}}(t), Id_{\mathfrak{A}_S(\bar{z})})$$

Beweis: Wir beweisen dies über den Formelaufbau.

$\varphi = r(t_1, \dots, t_n)$: Nach dem vorherigen Lemma gilt nun, dass

$$\begin{aligned} \llbracket \varphi \rrbracket_{x_1, \bar{z}}^{\mathfrak{A}} \circ (\mathfrak{A}_{\bar{z}}(t), Id) &= \mathfrak{A}_R(r) \circ (\mathfrak{A}_{x_1, \bar{z}}(t_1), \dots, \mathfrak{A}_{x_1, \bar{z}}(t_n)) \circ (\mathfrak{A}_{\bar{z}}(t), Id) \\ &= \mathfrak{A}_R(r) \circ (\mathfrak{A}_{\bar{z}}(t_1 \frac{x_1}{t}), \dots, \mathfrak{A}_{\bar{z}}(t_n \frac{x_1}{t})) \\ &= \llbracket \varphi(t) \rrbracket_{\bar{z}}^{\mathfrak{A}}. \end{aligned}$$

Der Beweis für $\varphi = t_1 = t_2$ verläuft genauso.

$\varphi = \psi \wedge \chi$: Angenommen, die Behauptung gelten schon für ψ und χ , dann gilt

$$\begin{aligned} \llbracket \varphi \rrbracket_{x_1, \bar{z}}^{\mathfrak{A}} \circ (\mathfrak{A}_{\bar{z}}(t), Id) &= \wedge \circ (\llbracket \psi \rrbracket_{x_1, \bar{z}}^{\mathfrak{A}}, \llbracket \chi \rrbracket_{x_1, \bar{z}}^{\mathfrak{A}}) \circ (\mathfrak{A}_{\bar{z}}(t), Id) \\ &= \wedge \circ (\llbracket \psi \rrbracket_{x_1, \bar{z}}^{\mathfrak{A}} \circ (\mathfrak{A}_{\bar{z}}(t), Id), \llbracket \chi \rrbracket_{x_1, \bar{z}}^{\mathfrak{A}} \circ (\mathfrak{A}_{\bar{z}}(t), Id)) \\ &= \wedge \circ (\llbracket \psi(t) \rrbracket_{\bar{z}}^{\mathfrak{A}}, \llbracket \chi(t) \rrbracket_{\bar{z}}^{\mathfrak{A}}) \\ &= \llbracket \varphi(t) \rrbracket_{\bar{z}}^{\mathfrak{A}}. \end{aligned}$$

Mit den gleichen Argumenten können die Fälle $\varphi = \psi \Rightarrow \chi$, $\varphi = \psi \vee \chi$, $\varphi = \bigvee_{i \in I} \psi_i$ und $\varphi = \bigwedge_{i \in I} \psi_i$ bewiesen werden.

$\varphi = \forall_s x_i \psi$: Angenommen, die Behauptung gelte für ψ . Dann erhalten wir nach der Beck-Chevalley-Gleichung aus Lemma 2.43, dass

$$\begin{aligned} \llbracket \varphi \rrbracket_{x_1, \bar{z}}^{\mathfrak{A}} \circ (\mathfrak{A}_{\bar{z}}(t), Id) &= \forall(\llbracket \psi \rrbracket_{x_1, \bar{z}, x_i}^{\mathfrak{A}}) \circ (\mathfrak{A}_{\bar{z}}(t), Id) \\ &= \forall(\llbracket \psi \rrbracket_{x_1, \bar{z}, x_i}^{\mathfrak{A}} \circ ((\mathfrak{A}_{\bar{z}}(t), Id) \times Id)) \\ &= \forall(\llbracket \psi \rrbracket_{x_1, \bar{z}, x_i}^{\mathfrak{A}} \circ (\mathfrak{A}_{\bar{z}}(t), Id)) \\ &= \forall(\llbracket \psi(t) \rrbracket_{\bar{z}, x_i}^{\mathfrak{A}}) \\ &= \llbracket \varphi(t) \rrbracket_{\bar{z}}^{\mathfrak{A}}. \end{aligned}$$

Entsprechend mit Lemma 2.49 beweist man den Fall für $\varphi = \exists_s x_i \psi$.

□

Wenden wir uns daher nun zwei Strukturen, in denen wir im weiteren arbeiten werden. Zuerst definieren wir eine Struktur, die die ganze Kategorie \mathcal{E} seien wird. Dafür definieren wir die Signatur $\sigma_{\mathcal{E}} = (S, F, R, K, fct)$ durch

- (i) $S = ob(\mathcal{E})$,
- (ii) $F = mor(\mathcal{E})$ und für alle $f : A \rightarrow B \in mor(\mathcal{E})$ $fct(f) := (A, B)$,

- (iii) $R = \{f \in \text{mor}(\mathcal{E}) \mid \text{cod}(f) = \Omega\}$ und für alle $f : A \rightarrow \Omega \in R$ $\text{fct}(f) := (A)$,
- (iv) $K = \{f \in \text{mor}(\mathcal{E}) \mid \text{dom}(f) = 1\}$ und für alle $f : 1 \rightarrow A \in K$ $\text{fct}(f) := (A)$.

Dann ist offensichtlich die Kategorie \mathcal{E} ein $\sigma_{\mathcal{E}}$ -Struktur. Da wir aber mehr an Mengenlehre als an Modelltheorie interessiert sind, definieren wir noch folgende ärmere Signatur: Wir definieren $\sigma_2 = (S, F, R, K, \text{fct})$ durch

- (i) $S = \text{ob}(\mathcal{E})$,
- (ii) $F = \emptyset$,
- (iii) $R = \{\in_A \mid A \in \text{ob}(\mathcal{C})\}$ und $\text{fct}(\in_A) := (A, \Omega^A)$,
- (iv) $K = \emptyset$.

Wir definieren ferner die σ_2 -Struktur \mathfrak{E} in \mathcal{E} durch $\mathfrak{E}_S(A) = A$ und $\mathfrak{E}_R(\in_A) := A \times \Omega \xrightarrow{\text{ev}_A} \Omega$. Im nächsten Abschnitt wird sich zeigen, dass diese Struktur stark genug ist, um dort so etwas wie 'lokale' Mengenlehre zu betreiben.

2. Lokale Mengenlehre

Wie angekündigt untersuchen wir nun die σ_2 -Struktur \mathfrak{E} . Die Signatur σ_2 ermöglicht uns lokale \in -Aussagen zu formulieren. Wir werden lokale Version der Mengenlehreaxiome Extensionalitätsaxiom, Aussonderungsaxiom, Paarmengenaxiom, Vereinigungsaxiom und Potenzmengenaxioms beweisen. Es verwundert nicht unbedingt, dass die letzten drei Axiome aus der Lokalität und dem Aussonderungsaxiom folgen.

Der Einfachheit halber, schreiben wir im folgenden $\llbracket \varphi \rrbracket_{\vec{x}}$ statt $\llbracket \varphi \rrbracket_{\vec{x}}^{\mathfrak{E}}$. Ferner schreiben wir auch oft statt \vec{x} direkt die entsprechenden Sorten der Variablen. Daher schreiben wir auch oft \in statt \in_X .

LEMMA 3.3. Sei $X \in \text{ob}(\mathcal{E})$ ein Objekt, dann gilt

$$\llbracket \forall_{\Omega^X} x \forall_{\Omega^X} y \ x = y \Leftrightarrow (\forall_X z (z \in x \Leftrightarrow z \in y)) \rrbracket = \mathbf{true}.$$

Beweis: Nach Lemma 2.42 genügt es zu zeigen, dass

$$\llbracket x = y \Leftrightarrow (\forall_X z (z \in x \Leftrightarrow z \in y)) \rrbracket_{\Omega^X, \Omega^X} = \mathbf{true}_{\Omega^X, \Omega^X}.$$

Nach Folgerung 2.33 und Lemma 2.31 müssen wir also nur noch zeigen, dass

$$\llbracket x = y \rrbracket_{\Omega^X, \Omega^X} = \llbracket (\forall_X z (z \in x \Leftrightarrow z \in y)) \rrbracket_{\Omega^X, \Omega^X}.$$

Nach Definition ist das zu $\llbracket x = y \rrbracket_{\Omega^X, \Omega^X}$ gehörige Unterobjekt gerade der Diagonalmorphismus Δ_{Ω^X} . Nach Eindeutigkeit des charakteristischen Morphismus, bleibt also nur noch zu zeigen, dass das folgende Diagramm ein Pullback-Quadrat ist:

$$\begin{array}{ccc} \Omega^X & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ \Delta_{\Omega^X} \downarrow & & \downarrow \mathbf{true} \\ \Omega^X \times \Omega^X & \xrightarrow{\forall_X (\llbracket z \in x \Leftrightarrow z \in y \rrbracket_{X, \Omega^X, \Omega^X})} & \Omega \end{array}$$

Nach Lemma 2.43, Definition von Δ_{Ω^X} , Lemma 2.31 und Lemma 2.42 gilt

$$\begin{aligned} \forall_X (\llbracket z \in x \Leftrightarrow z \in y \rrbracket_{\Omega^X, \Omega^X}) \circ \Delta_{\Omega^X} &= \forall_X (\llbracket z \in x \Leftrightarrow z \in y \rrbracket_{X, \Omega^X, \Omega^X} \circ (\text{Id} \times \Delta_{\Omega^X})) \\ &= \forall_X (=_{\Omega} \circ (\text{ev}_X \circ (\pi_1, \pi_2), \text{ev}_X \circ (\pi_1, \pi_3)) \circ (\text{Id} \times \Delta_{\Omega^X})) \\ &= \forall_X (=_{\Omega} \circ (\text{ev}_X \circ (\pi_1, \pi_2), \text{ev}_X \circ (\pi_1, \pi_2)) \circ (\text{Id} \times \Delta_{\Omega^X})) \\ &= \forall_X (\mathbf{true}_{X \times \Omega^X \times \Omega^X} \circ (\text{Id} \times \Delta_{\Omega^X})) \\ &= \mathbf{true}_{\Omega^X, \Omega^X}. \end{aligned}$$

Damit kommutiert das obige Diagramm. Sei nun $f = (f_1, f_2) : B \rightarrow \Omega^X \times \Omega^X$ ein Morphismus mit $\forall_X(\llbracket z \in x \Leftrightarrow z \in y \rrbracket_{\Omega^X, \Omega^X}) \circ f = \mathbf{true}_B$. Nach Definition der Interpretation von Formeln und Termen und da $=_{\Omega} \Leftrightarrow_{\Omega}$, erhalten wir nun

$$\begin{aligned} \llbracket z \in x \Leftrightarrow z \in y \rrbracket_{X, \Omega^X, \Omega^X} &= \Leftrightarrow_{\Omega} \circ (\llbracket z \in x \rrbracket_{X, \Omega^X, \Omega^X}, \llbracket z \in y \rrbracket_{X, \Omega^X, \Omega^X}) \\ &= \Leftrightarrow_{\Omega} \circ (ev_X \circ \pi_{1,2}, ev_X \circ \pi_{1,3}) \\ &= =_{\Omega} \circ (ev_X \circ \pi_{1,2}, ev_X \circ \pi_{1,3}) \end{aligned}$$

Nach der Beck-Chevalley-Gleichung aus Satz 2.43 gilt nun, dass

$$\begin{aligned} \forall_X(\llbracket z \in x \Leftrightarrow z \in y \rrbracket_{X, \Omega^X, \Omega^X}) \circ (f_1, f_2) &= \forall_X(\llbracket z \in x \Leftrightarrow z \in y \rrbracket_{X, \Omega^X, \Omega^X} \circ (Id \times (f_1, f_2))) \\ &= \forall_X(=_{\Omega} \circ (ev_X \circ \pi_{1,2}, ev_X \circ \pi_{1,3}) \circ (Id \times (f_1, f_2))) \\ &= \forall_X(=_{\Omega} \circ (ev_X \circ (Id \times f_1), ev_X \circ (Id \times f_2))). \end{aligned}$$

Also gilt die Gleichung $\forall_X(\llbracket z \in x \Leftrightarrow z \in y \rrbracket_{X, \Omega^X, \Omega^X}) \circ (f_1, f_2) = \mathbf{true}_B$ genau dann, wenn

$$\forall_X(=_{\Omega} \circ (ev_X \circ (Id \times f_1), ev_X \circ (Id \times f_2))) = \mathbf{true}_B.$$

Ferner nach Lemma 2.42 ist dies äquivalent zu $=_{\Omega} \circ (ev_X \circ (Id \times f_1), ev_X \circ (Id \times f_2)) = \mathbf{true}_{B \times X}$. Aber nach Lemma 2.31 gilt dies genau dann, wenn

$$ev_X \circ (Id \times f_1) = ev_X \circ (Id \times f_2).$$

Nach Eindeutigkeit der Transponierten gilt dies genau dann, wenn $f_1 = f_2$. Also faktorisiert f genau dann durch Δ_{Ω^X} , wenn $\forall_X(\llbracket z \in x \Leftrightarrow z \in y \rrbracket_{\Omega^X, \Omega^X}) \circ f = \mathbf{true}_B$. Daher ist das obige Diagramm ein Pullback-Quadrat. \square

Das vorherige Lemma hat also gezeigt, dass in einem Topos lokal das Extensionalitätsaxiom gilt. Das nächste Lemma zeigt nun, dass lokal auch Aussonderung gilt.

LEMMA 3.4. Sei $X \in ob(\mathcal{E})$ ein Objekt, φ eine σ_2 -Formel und \vec{Z} die Sorten der Variablen, die frei in σ_2 vorkommen, dann gilt

$$\llbracket \exists_{\Omega^X} z \forall_X x \ x \in z \Leftrightarrow \varphi \rrbracket_{\vec{Z}} = \mathbf{true}_{\vec{Z}}.$$

Beweis: Sei $\bar{\varphi} : \vec{Z} \rightarrow \Omega^X$ die Transponierte von $\llbracket \varphi \rrbracket_{X, \vec{Z}} : X \times \vec{Z} \rightarrow \Omega$. Wir berechnen zuerst das zu $\llbracket \forall_X x \ x \in z \Leftrightarrow \varphi \rrbracket_{\Omega^X, \vec{Z}}$ gehörige Unterobjekt von $\Omega^X \times \vec{Z}$.

(1) Das folgende Diagramm ist ein Pullback-Quadrat:

$$\begin{array}{ccc} \vec{Z} & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ (\bar{\varphi}, Id) \downarrow & & \downarrow \mathbf{true} \\ \Omega^X \times \vec{Z} & \xrightarrow{\llbracket \forall_X x \ x \in z \Leftrightarrow \varphi \rrbracket_{\Omega^X, \vec{Z}}} & \Omega \end{array}$$

Beweis: Zuerst zeigen wir, dass das obige Diagramm kommutativ ist. Da $\bar{\varphi}$ gerade diese Transponierte ist, erhalten wir, dass

$$\begin{aligned} \llbracket x \in z \Leftrightarrow \varphi \rrbracket_{X, \Omega^X, \vec{Z}} \circ (Id \times (\bar{\varphi}, Id)) &= =_{\Omega} \circ (ev_A \circ (Id \times \bar{\varphi}), \llbracket \varphi \rrbracket_{\Omega^X, \vec{Z}}) \\ &= \mathbf{true}_{X, \vec{Z}}. \end{aligned}$$

Nach Lemma 2.31 ist dann das Diagramm kommutativ. Sei nun ein anderer Morphismus $f = (f_1, f_2) : D \rightarrow \Omega^X \times \bar{Z}$ mit $\llbracket \forall_X x \ x \in z \Leftrightarrow \varphi \rrbracket_{\Omega^X, \bar{Z}} \circ f = \mathbf{true}_D$ gegeben. Dann gilt also

$$\llbracket x \in z \Leftrightarrow \varphi \rrbracket_{\Omega^X, \bar{Z}} \circ (Id \times f) = \mathbf{true}_{X \times D}.$$

Damit gilt $ev_X \circ (Id \times f_1) = \llbracket \varphi \rrbracket_{X, \Omega} \circ (Id \times f_2)$. Daher ist f_1 die Transponierte von $\llbracket \varphi \rrbracket_{X, \Omega} \circ (Id \times f_2)$. Nach Natürlichkeit der Transponierten ist f_1 dann gerade $\bar{\varphi} \circ f_2$. Damit gilt also insgesamt $(\bar{\varphi}, Id) \circ f_2 = (f_1, f_2)$ und somit ist das obige Diagramm ein Pullback-Quadrat.

□(1)

Nach (1) ist also $\llbracket \exists_{\Omega^X} z \forall_X x \ x \in z \Leftrightarrow \varphi \rrbracket_{\bar{Z}}$ der charakteristische Morphismus des Bildes von $\pi_{\bar{Z}} \circ (\bar{\varphi}, Id)$, also von $Id_{\bar{Z}}$. Natürlich ist $Id_{\bar{Z}}$ selbst sein eigenes Bild und, da $\mathbf{true}_{\bar{Z}}$ sein charakteristischer Morphismus ist, gilt also die Behauptung. □

Nach den vorherigen Lemmata und Lemma 2.42, erhalten wir folgende Folgerung. Dies Folgerung zeigt das die oben bereits erwähnten ZF-Axiome lokal in einem Topos gelten.

FOLGERUNG 3.5. Sei $X \in ob(\mathcal{E})$, φ eine σ_2 -Formel und \bar{Z} die Sorten der frei in φ vorkommenden Variablen, dann gilt

(Lokales Paar-Ax.) $\llbracket \forall_X x \forall_X y \exists_{\Omega^X} z \forall_X x' \ (x' \in z) \Leftrightarrow (x = x' \vee y = x') \rrbracket = \mathbf{true}$,

(Lokales \cup -Ax.) $\llbracket \forall_{\Omega^X} x \exists_{\Omega^X} z \forall_X y \ (y \in z) \Leftrightarrow (\exists_{\Omega^X} w \ w \in x \wedge y \in w) \rrbracket = \mathbf{true}$,

(Lokales Potenzmengen-Ax.) $\llbracket \forall_{\Omega^X} x \exists_{\Omega^X} z \forall_X y \ (y \in z) \Leftrightarrow (\forall_X x' \ x' \in y \Rightarrow x' \in x) \rrbracket = \mathbf{true}$, und

(Lokales Aussonderungs-Ax.) $\llbracket \forall_{\Omega^X} x \exists_{\Omega^X} z \forall_X y \ (y \in z) \Leftrightarrow (y \in x \wedge \varphi) \rrbracket_{\bar{Z}} = \mathbf{true}_{\bar{Z}}$.

3. Von-Neumann-Hierarchie in einem Topos

In diesem Abschnitt beantworten wir nun die Frage, wie man in dieser lokalen oder typisierten Mengenlehre wieder unbeschränkte \in -Relation und unbeschränkte Quantoren interpretiert. Der Schlüssel dafür wird die Nachahmung der klassischen von-Neumann-Hierarchie seien. Eine \in -Formel werden wir dann gültig nennen, wenn die Interpretation an jeder Stufe dieser Hierarchie gerade \mathbf{true}_{V_α} ist. Wir nehmen dafür im folgenden an, dass unser Topos \mathcal{E} vollständig und lokal klein ist. Ein Beispiel für einen solchen Topos ist eine Funktorkategorie $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}}$, wobei \mathcal{C} eine beliebige Kategorie ist. Vgl. [MM92] Chapter 1.

Wir werden nun also die Von-Neumann-Hierarchie in einem Topos definieren und gleichzeitig die \in -Relation daran ausdehnen. Wir werden für jedes $\alpha \in On$

- ein Objekt V_α ,
- einen Morphismus $\in_\alpha : V_\alpha \times V_\alpha \rightarrow \Omega$
- für jedes $\beta \in On$ mit $\beta < \alpha$ einen Monomorphismus $i_\beta^\alpha : V_\beta \hookrightarrow V_\alpha$

definieren, die noch folgende weitere Eigenschaft haben sollen:

- für alle $\alpha \in On$ ist $V_{\alpha+1} = \Omega^{V_\alpha}$.
- für alle $\alpha \in On$ ist $i_\alpha^{\alpha+1}$ die Transponierte von \in_α .
- für alle $\beta < \alpha + 1 \in On$ gilt $i_{\beta+1}^{\alpha+1} = \exists_{i_\beta^{\alpha+1}}$.

$\alpha = 0$: $V_0 := 0_E$ und \in_0 ist der Morphismus $\mathbf{false}_{0_E \times 0_E} : 0_E \times 0_E \rightarrow \Omega$. Ferner sei $V_1 := \Omega^0 = 1$ und $i_0^1 : 0 \rightarrow 1$ der einzige Morphismus von 0 nach 1. Nach Folgerung 2.24 ist dies ein Monomorphismus und die Transponierte von \in_0 .

$\alpha = \beta + 1$: Nach Induktionsvoraussetzung ist V_α das Potenzobjekt von V_β , also Ω^{V_β} und i_β^α die Transponierte von \in_β . Also der Morphismus, der das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V_\beta \times V_\beta & & \\ Id \times i_\beta^\alpha \downarrow & \searrow \in_\beta & \\ V_\beta \times V_\alpha & \xrightarrow{ev_{V_\beta}} & \Omega \end{array}$$

kommutieren lässt. Für alle $\gamma < \beta$ definieren wir dann i_γ^α als $i_\beta^\alpha \circ i_\gamma^\beta$. Nun definieren wir \in_α als $e_{i_\beta^\alpha}$. Nach Gleichung (4.1) aus Kapitel 1 gilt, dass

$$\begin{array}{ccc} V_\beta \times V_\alpha & & \\ i_\beta^\alpha \times Id \downarrow & \searrow ev_\beta & \\ V_\alpha \times V_\alpha & \xrightarrow{\in_\alpha} & \Omega \end{array}$$

kommutiert. Ferner definieren wir nun $V_{\alpha+1}$ als Ω^{V_α} und $i_\alpha^{\alpha+1}$ gerade als die Transponierte von \in_α . Damit gilt gerade $i_\alpha^{\alpha+1} = \exists_{i_\beta^\alpha}$ und daher ist $i_\alpha^{\alpha+1}$ ein Monomorphismus. Induktiv ergibt sich dann für $\gamma \leq \beta$ nach Satz 2.55

$$\begin{aligned} i_{\gamma+1}^{\alpha+1} &= i_\alpha^{\alpha+1} \circ i_{\gamma+1}^{\beta+1} \\ &= \exists_{i_\beta^\alpha} \circ \exists_{i_\gamma^\beta} \\ &= \exists_{i_\gamma^\alpha}. \end{aligned}$$

lim(α): Wir definieren V_α als den Colimes des Diagrammes

$$V_0 \xrightarrow{i_0^1} V_1 \rightarrow \dots \rightarrow V_\beta \xrightarrow{i_\beta^{\beta+1}} V_{\beta+1} \rightarrow \dots,$$

wobei $\beta < \alpha$. Wir definieren dann $i_\beta^\alpha : V_\beta \rightarrow V_\alpha$ als den durch den Colimes gegebenen Morphismus. Für $\beta_1 \leq \beta_2$ gilt dann $i_{\beta_1}^\alpha = i_{\beta_2}^\alpha \circ i_{\beta_1}^{\beta_2}$.

(1) Für $\beta < \alpha$, i_β^α ist ein Monomorphismus.

Beweis: Für $\gamma \leq \beta$ definiere $g_\gamma := i_\gamma^\alpha$. Für $\gamma \geq \beta$ definieren wir einen Morphismus $V_\gamma \rightarrow V_\beta$ mit der Eigenschaft $g_\gamma \circ i_\gamma^\delta = g_\delta$ für alle $\delta < \gamma$ induktiv:

- $g_{\gamma+1} : V_\gamma \rightarrow V_\beta$ sei ein durch die Folgerung 2.21 und die Morphismen g_γ und $i_\gamma^{\gamma+1}$ gegebener Morphismus mit $g_\gamma = g_{\gamma+1} \circ i_\gamma^{\gamma+1}$.
- Für $lim(\gamma)$, sei g_γ der durch die Colimit-Definition von V_γ und die Morphismen $(g_\delta)_{\delta < \gamma}$ gegebene Morphismus.

Für diese gilt dann $g_\gamma \circ i_\gamma^\delta = g_\delta$ für alle $\delta < \gamma$ nach der Definition der i_γ^δ . Nach der Colimit-Definition von V_α erhalten wir dann einen Morphismus $g : V_\alpha \rightarrow V_\beta$ mit $g \circ i_\gamma^\alpha = g_\gamma$ für alle $\gamma < \alpha$. Für $\gamma = \beta$ gilt dann

$$Id_\beta = g_\beta = g \circ i_\beta^\alpha.$$

Damit hat i_β^α ein Linksinverses und ist daher ein Monomorphismus.

□(1)

Dann gilt $\exists_{i_\beta^\alpha} : V_{\beta+1} \rightarrow \Omega^{V_\lambda}$ für jedes $\beta \leq \alpha$. Nach Konstruktion gilt für $\beta_1 \leq \beta_2$

$$\begin{aligned} \exists_{i_{\beta+1}^\alpha} \circ i_{\beta_1}^{\beta_1+1} &= \exists_{i_{\beta+2}^\alpha} \circ \exists_{i_{\beta_1}^{\beta_2}} \circ i_{\beta_1}^{\beta_1+1} \\ &= \exists_{i_{\beta+2}^\alpha} \circ i_{\beta_1+1}^{\beta_2+1} \circ i_{\beta_1}^{\beta_1+1} \\ &= \exists_{i_{\beta+2}^\alpha} \circ i_{\beta_2}^{\beta_2+1} \circ i_{\beta_1}^{\beta_2}. \end{aligned}$$

Dann gibt es nach der Colimit-Definition von V_α genau einen Morphismus $f : V_\alpha \rightarrow \Omega^{V_\alpha}$ mit $f \circ i_\beta^\alpha = \exists_{i_\beta^\alpha} \circ i_\beta^{\beta+1}$. Dann definieren wir $\in_\alpha := ev_\alpha \circ (Id \times f)$. Ferner definieren wir nun auch in diesem Fall $V_{\alpha+1}$ als Ω^{V_α} und $i_\alpha^{\alpha+1}$ gerade als die Transponierte von \in_α . Diese Transponierte ist nach Definition gerade f . Ferner gilt dann für $\gamma < \alpha$ nach Satz 2.55

$$\begin{aligned} i_{\gamma+1}^{\alpha+1} &= i_\alpha^{\alpha+1} \circ i_{\gamma+1}^\alpha \\ &= f \circ i_{\gamma+1}^\alpha \\ &= \exists_{i_{\gamma+1}^\alpha} \circ i_{\gamma+1}^{\gamma+2} \\ &= \exists_{i_{\gamma+1}^\alpha} \circ \exists_{i_{\gamma+1}^{\gamma+1}} \\ &= \exists_{i_\gamma^\alpha}. \end{aligned}$$

Damit ist die Definition der von-Neumann-Hierarchie in einem Topos abgeschlossen. Wir werden im folgenden ev_α für ev_{V_α} und $=_\alpha$ für $=_{V_\alpha}$ schreiben.

Betrachten wir nun also die Frage der unbeschränkten Quantoren. Die Idee ist klar: eine mit einem Allquantor versehene Formel soll wahr sein, wenn sie für jedes V_α wahr ist. Umgekehrt soll eine mit Existenzquantor versehene Aussage wahr sein, wenn sie an einem V_α bereits wahr ist. Wir erweitern die Sprache der Mengenlehre noch für spätere Anwendung um Relationssymbole φ_α für jedes $\alpha \in On$.

Sei also eine \in -Formel φ mit freien Variablen (x_1, \dots, x_n) gegeben. Weiter sei ein genauso langes Tupel von Ordinalzahlen $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ als Typisierung der frei Variablen. Sei im folgenden $\mu_\beta^\alpha : V_\alpha \rightarrow \Omega$ der charakteristische Morphismus des Monomorphismus $i_\beta^\alpha : V_\beta \hookrightarrow V_\alpha$.

$$\begin{aligned} \llbracket x_1 \in x_1 \rrbracket_\alpha &:= \mathbf{false}_\alpha \\ \llbracket x_1 = x_1 \rrbracket_\alpha &:= \mathbf{true}_\alpha \\ \llbracket x_1 = x_2 \rrbracket_{\alpha,\beta} &:= =_{max(\alpha,\beta)} \circ (i_\alpha^{max(\alpha,\beta)} \times i_\beta^{max(\alpha,\beta)}) \\ \llbracket x_1 \in x_2 \rrbracket_{\alpha,\beta} &:= \in_{max(\alpha,\beta)} \circ (i_\alpha^{max(\alpha,\beta)} \times i_\beta^{max(\alpha,\beta)}) \\ \llbracket \varphi_\beta(x) \rrbracket_\alpha &:= \mu_\beta^{max(\alpha,\beta)} \circ i_\alpha^{max(\alpha,\beta)} \\ \llbracket \forall x_1 \varphi \rrbracket_{\vec{\alpha}} &:= \bigwedge_{\alpha_1 \in On} \llbracket \forall_{\alpha_1} x_1 \varphi \rrbracket_{\vec{\alpha}} \\ \llbracket \exists x_1 \varphi \rrbracket_{\vec{\alpha}} &:= \bigvee_{\alpha_1 \in On} \llbracket \exists_{\alpha_1} x_1 \varphi \rrbracket_{\vec{\gamma}} \end{aligned}$$

Für jedes $\vec{\alpha}$ ist die Klasse $Hom_{\mathcal{E}}(V_{\vec{\alpha}}, \Omega)$ eine Menge, da \mathcal{E} lokal klein ist. Damit existieren die Disjunktionen und Konjunktionen in der obigen Definition. Für jedes

solche $\bigwedge_{\alpha_1 \in On} \llbracket \forall_{\alpha_1} x_1 \varphi \rrbracket_{\vec{\alpha}}$ gibt es also ein $\beta \in On$, so dass folgende Gleichung gilt:

$$(3.1) \quad \bigwedge_{\alpha_1 \in On} \llbracket \forall_{\alpha_1} x_1 \varphi \rrbracket_{\vec{\alpha}} = \llbracket \bigwedge_{\alpha_1 \leq \beta} \forall_{\alpha_1} x_1 \varphi \rrbracket_{\vec{\alpha}} = \wedge_{\beta} \circ (\llbracket \forall_0 x_1 \varphi \rrbracket_{\vec{\alpha}}, \dots, \llbracket \forall_{\beta} x_1 \varphi \rrbracket_{\vec{\alpha}})$$

Die gleiche Aussage gilt natürlich ebenfalls für \exists . Die anderen Konnektoren \wedge, \vee und \Rightarrow interpretieren wir wie in Abschnitt 1 definiert. Wir sagen, dass eine \in -Formel φ an der Stufe $\vec{\alpha}$ gültig ist, falls $\llbracket \varphi \rrbracket_{\vec{\alpha}} = \mathbf{true}_{\vec{\alpha}}$. Eine Formel φ ist gültig in \mathcal{E} , falls φ an jeder Stufe $\vec{\alpha}$ gültig ist. In diesem Fall schreiben wir auch $\mathcal{E} \models \varphi$.

4. Natürlichkeit des Modells

Die folgenden beiden Lemmata zeigen nun gerade, dass die Definition dieser Interpretation natürlich ist. Wir bemerken dafür noch, dass für $\beta > \alpha$, $\llbracket \varphi_{\beta}(x) \rrbracket_{\alpha} = \mathbf{true}_{\alpha}$ gilt, da μ_{β}^{β} gerade \mathbf{true}_{β} ist.

LEMMA 3.6. Sei $\beta \leq \alpha \in On$, dann gilt $\in_{\alpha} \circ (i_{\beta}^{\alpha} \times i_{\beta}^{\alpha}) = \in_{\beta}$.

Beweis: Wir beweisen dies nun über Ordinalzahlinduktion. Sei zuerst $\alpha = \beta + 1$. Wie oben erwähnt wissen wir bereits, dass $\in_{\alpha} \circ (i_{\beta}^{\alpha} \times Id) = ev_{\beta}$. Da i_{β}^{α} als Transponierte von \in_{β} definiert wurde, gilt auch $\in_{\beta} = ev_{\beta} \circ (Id \times i_{\beta}^{\alpha})$. Damit gilt insgesamt, dass

$$\begin{aligned} \in_{\alpha} \circ (i_{\beta}^{\alpha} \times i_{\beta}^{\alpha}) &= ev_{\beta} \circ (Id \times i_{\beta}^{\alpha}) \\ &= \in_{\beta} . \end{aligned}$$

Gelte nun die Aussage für $\beta \leq \alpha$, dann gilt

$$\begin{aligned} \in_{\alpha+1} \circ (i_{\beta}^{\alpha+1} \times i_{\beta}^{\alpha+1}) &= \in_{\alpha+1} \circ (i_{\alpha}^{\alpha+1} \times i_{\alpha}^{\alpha+1}) \circ (i_{\beta}^{\alpha} \times i_{\beta}^{\alpha}) \\ &= \in_{\alpha} \circ (i_{\beta}^{\alpha} \times i_{\beta}^{\alpha}) \\ &= \in_{\beta} . \end{aligned}$$

Damit gilt die Aussage auch für $\alpha + 1$. Es verbleibt der Beweis der Aussage im Limesfall. Sei $\lambda \in On$ mit $\lim(\lambda)$ und gelte die Aussage für alle $\alpha < \lambda$. Ferner sei f , der in der Definition von \in_{λ} vorkommene Morphismus. Wir erhalten damit aus der Definition von \in_{λ} und Gleichung (4.1) aus Kapitel 2, dass

$$\begin{aligned} \in_{\lambda} \circ (i_{\alpha}^{\lambda} \times i_{\alpha}^{\lambda}) &= ev_{\lambda} \circ (Id \times f) \circ (i_{\alpha}^{\lambda} \times i_{\alpha}^{\lambda}) \\ &= ev_{\lambda} \circ (Id \times \exists_{i_{\alpha}^{\lambda}}) \circ (i_{\alpha}^{\lambda} \times i_{\alpha}^{\alpha+1}) \\ &= e_{i_{\alpha}^{\lambda}} \circ (i_{\alpha}^{\lambda} \times Id) \circ (Id \times i_{\alpha}^{\alpha+1}) \\ &= ev_{\alpha} \circ (Id \times i_{\alpha}^{\alpha+1}) \\ &= \in_{\alpha} . \end{aligned}$$

□

LEMMA 3.7. Sei φ eine \in -Formel, $\vec{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ zwei Tupel von Ordinalzahlen mit $\beta_i \leq \alpha_i$ für $i = 1 \dots n$, dann gilt

$$\llbracket \varphi \rrbracket_{\vec{\beta}} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\vec{\alpha}} \circ i_{\vec{\beta}}^{\vec{\alpha}}.$$

Beweis: Wir beweisen die Aussage per Induktion über den Formelaufbau.

$\varphi = x_1 \in x_2$:

$$\begin{aligned}
\llbracket \varphi \rrbracket_{\beta_1, \beta_2} &= \in_{\max(\beta_1, \beta_2)} \circ (i_{\beta_1}^{\max(\beta_1, \beta_2)} \times i_{\beta_2}^{\max(\beta_1, \beta_2)}) \\
&= \in_{\max(\alpha_1, \alpha_2)} \circ (i_{\max(\beta_1, \beta_2)}^{\max(\alpha_1, \alpha_2)} \times i_{\max(\beta_1, \beta_2)}^{\max(\alpha_1, \alpha_2)}) \circ (i_{\beta_1}^{\max(\beta_1, \beta_2)} \times i_{\beta_2}^{\max(\beta_1, \beta_2)}) \\
&= \in_{\max(\alpha_1, \alpha_2)} \circ (i_{\alpha_1}^{\max(\alpha_1, \alpha_2)} \times i_{\alpha_2}^{\max(\alpha_1, \alpha_2)}) \circ (i_{\beta_1}^{\alpha_1} \times i_{\beta_2}^{\alpha_2}) \\
&= \in_{\max(\alpha_1, \alpha_2)} \circ (i_{\alpha_1}^{\max(\alpha_1, \alpha_2)} \times i_{\alpha_2}^{\max(\alpha_1, \alpha_2)}) \circ (i_{\beta_1}^{\alpha_1} \times i_{\beta_2}^{\alpha_2}) \\
&= \llbracket \varphi \rrbracket_{\alpha_1, \alpha_2} \circ (i_{\beta_1}^{\alpha_1} \times i_{\beta_2}^{\alpha_2}).
\end{aligned}$$

Der Fall $\varphi = x = y$ wird genauso bewiesen.

$\varphi = \varphi_\gamma$: Für $\gamma \leq \beta$ gilt nach Definition $i_\gamma^\alpha = i_\beta^\alpha \circ i_\gamma^\beta$.

(1) Das folgende Diagramm ist ein Pullback-Quadrat:

$$\begin{array}{ccc}
V_\gamma & \xrightarrow{Id} & V_\gamma \\
i_\gamma^\beta \downarrow & & \downarrow i_\gamma^\alpha \\
V_\beta & \xrightarrow{i_\beta^\alpha} & V_\alpha
\end{array}$$

Beweis: Wie bereits erwähnt kommutiert das Diagramm. Seien nun zwei Morphismen $f : D \rightarrow V_\beta$ und $g : D \rightarrow V_\gamma$ gegeben mit $i_\beta^\alpha \circ f = i_\gamma^\alpha \circ g$. Dann gilt auch $i_\beta^\alpha \circ f = i_\beta^\alpha \circ i_\gamma^\beta \circ g$. Da i_β^α ein Monomorphismus ist, gilt damit $f = i_\gamma^\beta \circ g$ und $g = Id \circ g$. Da g offensichtlich der einzige Morphismus mit dieser Eigenschaft ist, ist das obige Diagramm ein Pullback-Quadrat.

□(1)

Aus (1) und Lemma 2.17 folgt dann, dass

$$\begin{aligned}
\llbracket \varphi_\gamma \rrbracket_\alpha \circ i_\beta^\alpha &= \mu_\gamma^\alpha \circ i_\beta^\alpha \\
&= \mu_\gamma^\beta.
\end{aligned}$$

Für $\beta \leq \gamma \leq \alpha$ gilt dann ebenfalls $i_\beta^\alpha = i_\gamma^\alpha \circ i_\beta^\gamma$.

$$\begin{aligned}
\llbracket \varphi_\gamma \rrbracket_\alpha \circ i_\beta^\alpha &= \mu_\gamma^\alpha \circ i_\beta^\alpha \\
&= \mu_\gamma^\alpha \circ i_\gamma^\alpha \circ i_\beta^\gamma \\
&= \mathbf{true}_\gamma \circ i_\beta^\gamma \\
&= \mathbf{true}_\beta = \llbracket \varphi_\gamma \rrbracket_\beta.
\end{aligned}$$

Für $\beta \leq \alpha \leq \gamma$ gilt also dann

$$\begin{aligned}
\llbracket \varphi_\gamma \rrbracket_\alpha \circ i_\beta^\alpha &= \mathbf{true}_\alpha \circ i_\beta^\alpha \\
&= \mathbf{true}_\beta = \llbracket \varphi_\gamma \rrbracket_\beta.
\end{aligned}$$

$\varphi = \psi \wedge \chi$: Gelte nun die Behauptung jeweils für ψ und χ , dann gilt

$$\begin{aligned}
\llbracket \varphi \rrbracket_\alpha &= \wedge \circ (\llbracket \psi \rrbracket_\alpha, \llbracket \chi \rrbracket_\alpha) \\
&= \wedge \circ (\llbracket \psi \rrbracket_\beta \circ i_\alpha^\beta, \llbracket \chi \rrbracket_\alpha \circ i_\alpha^\beta) \\
&= \wedge \circ (\llbracket \psi \rrbracket_\beta, \llbracket \chi \rrbracket_\alpha) \circ i_\alpha^\beta \\
&= \llbracket \varphi \rrbracket_\beta \circ i_\alpha^\beta.
\end{aligned}$$

Der Fall $\varphi = \psi \Rightarrow \chi$ und $\varphi = \psi \vee \chi$ wird offensichtlich genauso bewiesen.

$\varphi = \forall_\gamma x \psi$: Unter Ausnutzung der Beck-Chevalley-Gleichung aus Lemma 2.43 ergibt sich direkt:

$$\begin{aligned} \llbracket \varphi \rrbracket_\alpha &= \forall_\gamma (\llbracket \psi \rrbracket_{\gamma, \alpha}) \\ &= \forall_\gamma (\llbracket \psi \rrbracket_{\gamma, \beta} \circ (Id \times i_\alpha^\beta)) \\ &= \forall_\gamma (\llbracket \psi \rrbracket_{\gamma, \beta}) \circ i_\alpha^\beta \\ &= \llbracket \varphi \rrbracket_\beta \circ i_\alpha^\beta. \end{aligned}$$

Der Fall $\varphi = \exists_\gamma x \psi$ folgt genauso aus Lemma 2.49.

$\varphi = \forall x \psi$: Direkt aus dem vorherigen Fall und Gleichung (3.1) folgt für gewisses $\gamma \in On$, dass

$$\begin{aligned} \llbracket \varphi \rrbracket_{\bar{\alpha}} &= \bigwedge_{\alpha_1 \in On} \llbracket \forall_{\alpha_1} x_1 \varphi \rrbracket_{\bar{\alpha}} \\ &= \bigwedge_{\alpha_1 \in On} (\llbracket \forall_{\alpha_1} x_1 \varphi \rrbracket_{\bar{\beta}} \circ i_{\bar{\alpha}}^{\bar{\beta}}) \\ &= \wedge_\gamma \circ (\llbracket \forall_0 x_1 \varphi \rrbracket_{\bar{\beta}} \circ i_{\bar{\alpha}}^{\bar{\beta}}, \dots, \llbracket \forall_\gamma x_1 \varphi \rrbracket_{\bar{\beta}} \circ i_{\bar{\alpha}}^{\bar{\beta}}) \\ &= \wedge_\gamma \circ (\llbracket \forall_0 x_1 \varphi \rrbracket_{\bar{\beta}}, \dots, \llbracket \forall_\gamma x_1 \varphi \rrbracket_{\bar{\beta}}) \circ i_{\bar{\alpha}}^{\bar{\beta}} \\ &= (\bigwedge_{\alpha_1 \in On} \llbracket \forall_{\alpha_1} x_1 \psi \rrbracket_{\bar{\beta}}) \circ i_{\bar{\alpha}}^{\bar{\beta}} \\ &= \llbracket \varphi \rrbracket_\alpha \circ i_{\bar{\alpha}}^{\bar{\beta}}. \end{aligned}$$

Der Fall $\varphi = \exists x \psi$ folgt mit dem gleichen Argument aus dem Fall $\varphi = \exists_\gamma x \psi$. \square

FOLGERUNG 3.8. Für $\beta \leq \alpha$ gilt $\llbracket \varphi_\beta(x_1) \Rightarrow \varphi \rrbracket_{\alpha, \vec{\gamma}} = \mathbf{true}$ genau dann, wenn $\llbracket \varphi \rrbracket_{\beta, \vec{\gamma}} = \mathbf{true}$.

Beweis: Sei $\llbracket \varphi_\beta(x_1) \Rightarrow \varphi \rrbracket_{\alpha, \vec{\gamma}} = \mathbf{true}$. Nach Lemma 2.32 gilt dies genau dann, wenn $\mu_\beta^\alpha \circ \pi_\alpha \leq \llbracket \varphi \rrbracket_{\alpha, \vec{\gamma}}$. Nach Satz 2.28 gilt dies genau dann, wenn $\llbracket \varphi \rrbracket_{\alpha, \vec{\gamma}} \circ (i_\beta^\alpha \times Id) = \mathbf{true}$. Nach Lemma 3.7 also genau dann, wenn $\llbracket \varphi \rrbracket_{\beta, \vec{\gamma}} = \mathbf{true}$. \square

Wenden wir uns genauer den Limesstufen in unserer Hierarchie zu. Sei nun $\lambda \in On$ mit $\lim(\lambda)$. Sei ferner $\vec{\gamma}$ ein Tupel von Ordinalzahlen, $f : V_{\vec{\gamma}} \rightarrow \Omega$ ein Morphismus und $s : S \hookrightarrow V_{\vec{\gamma}}$ das dazu gehörige Unterobjekt. Weiterhin sei für jedes $\alpha < \lambda$ ein $f_\alpha : V_{\vec{\gamma}} \times V_\alpha \rightarrow \Omega$ gegeben, so dass für zwei $\alpha_1 \leq \alpha_2 < \lambda$ gilt $f_{\alpha_1} = f_{\alpha_2} \circ (Id \times i_{\alpha_1}^{\alpha_2})$. Sei dann $g_\alpha : V_\alpha \rightarrow \Omega^{V_{\vec{\gamma}}}$ die Transponierte von f_α und nach Natürlichkeit der Transponierten gilt für zwei $\alpha_1 \leq \alpha_2 < \lambda$:

$$g_{\alpha_1} = g_{\alpha_2} \circ i_{\alpha_1}^{\alpha_2}.$$

Nach der Colimes-Definition von V_λ gibt es dann genau einen Morphismus $g : V_\lambda \rightarrow \Omega^{V_{\vec{\gamma}}}$, so dass für alle $\alpha \leq \lambda$ gilt $g_\alpha = g \circ i_\alpha^\lambda$. Sei $h := ev_{\vec{\gamma}} \circ (Id \times g) : V_\lambda \times V_{\vec{\gamma}} \rightarrow \Omega$.

(1) Für alle $\alpha < \lambda$ gilt $f \circ \pi_{\vec{\gamma}} \leq f_\alpha$ genau dann, wenn $f \circ \pi_{\vec{\gamma}} \leq h$.

Beweis: Gelte nun $f \circ \pi_{\vec{\gamma}} \leq f_\alpha$. Nach Satz 2.28 gilt dann, dass

$$f_\alpha \circ (s \times Id) = ev_{\vec{\gamma}} \circ (Id \times g_\alpha) \circ (s \times Id) = \mathbf{true}_{S \times V_\alpha}.$$

Sei nun $k : V_\lambda \rightarrow \Omega^S$ die Transponierte von $h \circ (s \times Id) = ev_{\bar{\gamma}} \circ (s \times g)$. Nach Natürlichkeit der Transponierten ist $k \circ i_\alpha^\lambda$ gerade die Transponierte von $ev_{\bar{\gamma}} \circ (s \times g) \circ (Id \times i_\alpha^\lambda)$. Dann aber gilt

$$\begin{aligned} ev_{\bar{\gamma}} \circ (s \times g) \circ (Id \times i_\alpha^\lambda) &= ev_{\bar{\gamma}} \circ (s \times g \circ i_\alpha^\lambda) \\ &= ev_{\bar{\gamma}} \circ (s \times g_\alpha) \\ &= \mathbf{true}_{S \times V_\alpha}. \end{aligned}$$

Dann ist also $k \circ i_\alpha^\lambda$ die Transponierte von $\mathbf{true}_{S \times V_\alpha}$. Wir wollen nun zeigen, dass daraus folgt, dass k die Transponierte von $\mathbf{true}_{S \times V_\lambda}$ ist. Da $\mathbf{true}_{S \times V_\alpha} = \mathbf{true}_{S \times V_\lambda} \circ (Id \times i_\alpha^\lambda)$, gilt nach Natürlichkeit der Transponierten folgende Gleichung:

$$\overline{\mathbf{true}_{S \times V_\lambda} \circ i_\alpha^\lambda} = \overline{\mathbf{true}_{S \times V_\alpha}}.$$

Nach der Colimit-Definition von V_γ gilt also, dass $k = \overline{\mathbf{true}_{S \times V_\lambda}}$ und somit nach Definition von k und Eindeutigkeit der Transponierten $ev_{\bar{\gamma}} \circ (s \times g) = \mathbf{true}_{S \times V_\lambda}$. Nach Definition von h gilt also $h \circ (s \times Id) = \mathbf{true}_{S \times V_\lambda}$. Nach Satz 2.28 gilt damit, dass $f \circ \pi_{\bar{\gamma}} \leq h$.

Gelte umgekehrt, dass $f \circ \pi_{\bar{\gamma}} \leq h$. Dann gilt nach Satz 2.28, dass $ev_{\bar{\gamma}} \circ (s \times g) = \mathbf{true}_{S \times V_\lambda}$. Für $\alpha \leq \lambda$ gilt, dann

$$\begin{aligned} f_\alpha \circ (s \times Id) &= ev_{\bar{\gamma}} \circ (s \times g_\alpha) \\ &= ev_{\bar{\gamma}} \circ (s \times g) \circ (Id \times i_\alpha^\lambda) \\ &= \mathbf{true}_{S \times V_\lambda} \circ (Id \times i_\alpha^\lambda) \\ &= \mathbf{true}_{S \times V_\alpha}. \end{aligned}$$

Damit gilt nach Satz 2.28 $f \circ \pi_{\bar{\gamma}} \leq f_\alpha$.

□(1)

Aus dem Lemma 3.7 und (1) erhalten wir dann direkt diese Folgerung:

FOLGERUNG 3.9. Sei $\lambda \in On$ mit $\lim(\lambda)$, dann gilt

$$\forall \alpha < \lambda \quad \llbracket \psi \rrbracket_{\bar{\gamma}} \circ \pi_{\bar{\gamma}} \leq \llbracket \varphi \rrbracket_{\alpha, \bar{\gamma}} \text{ genau dann, wenn } \llbracket \psi \rrbracket_{\bar{\gamma}} \circ \pi_{\bar{\gamma}} \leq \llbracket \varphi \rrbracket_{\lambda, \bar{\gamma}}.$$

Setzen wir in der vorherigen Folgerung $\llbracket \psi \rrbracket_{\bar{\gamma}} = \mathbf{true}_{\bar{\gamma}}$ erhalten wir auch

FOLGERUNG 3.10. Sei $\lambda \in On$ mit $\lim(\lambda)$, dann gilt

$$\llbracket \varphi \rrbracket_{\lambda, \bar{\gamma}} = \mathbf{true}_{\lambda, \bar{\gamma}} \text{ genau dann, wenn } \llbracket \varphi \rrbracket_{\alpha, \bar{\gamma}} = \mathbf{true}_{\alpha, \bar{\gamma}}.$$

Mit diesem Ergebnis erhalten wir folgendes wichtiges Resultat:

FOLGERUNG 3.11. Für alle $\alpha > \beta$ gilt:

$$\llbracket x_1 \in x_2 \Rightarrow \varphi_\beta(x_1) \rrbracket_{\alpha, \beta+1} = \mathbf{true}_{\alpha, \alpha}.$$

Beweis: Wir beweisen dafür folgende Aussage per Ordinalzahlinduktion. Sei nun $\beta + 1 = \alpha$. Nach Definition ist \in_α gerade $e_{i_\beta^\alpha}$. Sei $s = (s_1, s_2) : E_\beta \rightarrow V_\beta \times V_\alpha$ das zu ev_β gehörige Unterobjekt. Nach Definition von $e_{i_\beta^\alpha}$ ist $(i_\beta^\alpha \times Id) \circ s$ das Unterobjekt, dessen charakteristischer Morphismus gerade \in_α ist. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} \mu_\beta^\alpha \circ \pi_1 \circ (i_\beta^\alpha \times Id) \circ s &= \mu_\beta^\alpha \circ i_\beta^\alpha \circ s_1 \\ &= \mathbf{true}_\alpha \circ s_1 \\ &= \mathbf{true}_{E_\beta}. \end{aligned}$$

Nach Satz 2.28 gilt damit also

$$\llbracket x_1 \in x_2 \rrbracket_{\alpha, \alpha} \leq \llbracket \varphi_\beta(x_1) \rrbracket_{\alpha, \alpha}.$$

Nach Lemma 2.32 gilt somit die Behauptung für $\alpha = \beta + 1$.

Damit wenden wir uns nun dem Nachfolgerfall zu: Gelte die Aussage also für $\alpha > \beta$, dann wollen wir nun zeigen, dass sie auch für $\alpha+1$ gilt. Wir bemerken zu erst, dass aus dem bisherigen Beweis $\llbracket x_1 \in x_2 \rrbracket_{\alpha+1, \alpha+1} \leq \llbracket \varphi_\alpha(x_1) \rrbracket_{\alpha+1, \alpha+1}$ folgt. Ferner gilt $\llbracket \varphi_{\beta+1}(x_2) \rrbracket_{\alpha+1, \alpha+1} \leq \llbracket \varphi_\alpha(x_2) \rrbracket_{\alpha+1, \alpha+1}$, da $\beta \leq \alpha$. Nach diesen Gleichung und den Rechenregeln in Heyting Algebren gilt nun

$$\begin{aligned} & \llbracket \varphi_{\beta+1}(x_2) \Rightarrow x_1 \in x_2 \Rightarrow \varphi_\beta(x_1) \rrbracket_{\alpha+1, \alpha+1} \\ &= \llbracket (\varphi_{\beta+1}(x_2) \wedge x_1 \in x_2) \Rightarrow \varphi_\beta(x_1) \rrbracket_{\alpha+1, \alpha+1}. \\ &= \llbracket (\varphi_{\beta+1}(x_2) \wedge x_1 \in x_2 \wedge \varphi_\alpha(x_1) \wedge \varphi_\alpha(x_2)) \Rightarrow \varphi_\beta(x_1) \rrbracket_{\alpha+1, \alpha+1} \\ &= \llbracket (\varphi_\alpha(x_1) \wedge \varphi_\alpha(x_2)) \Rightarrow ((\varphi_{\beta+1}(x_2) \wedge x_1 \in x_2) \Rightarrow \varphi_\beta(x_1)) \rrbracket_{\alpha+1, \alpha+1} \\ &= \llbracket (\varphi_\alpha(x_1) \wedge \varphi_\alpha(x_2)) \Rightarrow (\varphi_{\beta+1}(x_2) \Rightarrow (x_1 \in x_2 \Rightarrow \varphi_\beta(x_1))) \rrbracket_{\alpha+1, \alpha+1}. \end{aligned}$$

Nach Folgerung 3.8 ist dieser Morphismus also gerade $\mathbf{true}_{\alpha+1, \alpha+1}$, wenn $\llbracket \varphi_{\beta+1}(x_2) \Rightarrow (x_1 \in x_2 \Rightarrow \varphi_\beta(x_1)) \rrbracket_{\alpha, \alpha} = \mathbf{true}_{\alpha, \alpha}$ gilt. Dies gilt aber wieder nach Folgerung 3.8 genau dann, wenn $\llbracket x_1 \in x_2 \Rightarrow \varphi_\beta(x_1) \rrbracket_{\alpha, \beta+1} = \mathbf{true}_{\alpha, \beta+1}$. Dies ist jedoch gerade die Induktionsvoraussetzung. Damit gilt also $\llbracket \varphi_{\beta+1}(x_2) \Rightarrow x_1 \in x_2 \Rightarrow \varphi_\beta(x_1) \rrbracket_{\alpha+1, \alpha+1} = \mathbf{true}_{\alpha+1, \alpha+1}$. Nach Folgerung 3.8 gilt dann die behauptete Gleichung: $\llbracket x_1 \in x_2 \Rightarrow \varphi_\beta(x_1) \rrbracket_{\alpha+1, \beta+1} = \mathbf{true}_{\alpha+1, \beta+1}$.

Sei $\lambda \in On$ gegeben mit $\lim(\lambda)$. Angenommen für alle $\alpha < \lambda$ gelte die Gleichung $\llbracket x_1 \in x_2 \Rightarrow \varphi_\beta(x_1) \rrbracket_{\alpha, \beta+1} = \mathbf{true}_{\alpha, \beta+1}$. Dann gilt sich auch für die Limesordinalzahl λ nach Folgerung 3.10.

□

Der Rest dieses Abschnittes beschäftigt sich nun mit beschränkten Quantoren. Im folgenden betrachten wir nun wie sich Quantoren verhalten, wenn wir sie mittels μ_β^α einschränken.

LEMMA 3.12. Sei $\alpha, \beta \in On$ und $\alpha \leq \beta$, dann gilt

- (i) $\llbracket \forall_\beta x \varphi_\alpha \Rightarrow \varphi(x) \rrbracket_{\bar{\gamma}} = \llbracket \forall_\alpha x \varphi(x) \rrbracket_{\bar{\gamma}}$
- (ii) $\llbracket \exists_\beta x \varphi_\alpha \wedge \varphi(x) \rrbracket_{\bar{\gamma}} = \llbracket \exists_\alpha x \varphi(x) \rrbracket_{\bar{\gamma}}$

Beweis: (i) Wir berechnen leicht mit Lemma 3.7 und Folgerung 2.45, dass

$$\begin{aligned} \llbracket \forall_\beta x \varphi_\alpha \Rightarrow \varphi(x) \rrbracket_{\bar{\gamma}} &= \forall_\beta (\mu_\alpha^\beta \circ \pi_\beta \Rightarrow \llbracket \varphi(x) \rrbracket_{\beta, \bar{\gamma}}) \\ &= \forall_\alpha (\llbracket \varphi(x) \rrbracket_{\beta, \bar{\gamma}} \circ (i_\alpha^\beta \times Id)) \\ &= \forall_\alpha (\llbracket \varphi(x) \rrbracket_{\alpha, \bar{\gamma}}) \\ &= \llbracket \forall_\alpha x \varphi(x) \rrbracket_{\bar{\gamma}} \end{aligned}$$

(ii) Ähnlich wie (i) folgt (ii) leicht aus Lemma 3.7 und Folgerung 2.50, dass

$$\begin{aligned} \llbracket \exists_\beta x \varphi_\alpha \wedge \varphi(x) \rrbracket_{\bar{\gamma}} &= \exists_\beta (\mu_\alpha^\beta \circ \pi_\beta \wedge \llbracket \varphi(x) \rrbracket_{\beta, \bar{\gamma}}) \\ &= \exists_\alpha (\llbracket \varphi(x) \rrbracket_{\beta, \bar{\gamma}} \circ (i_\alpha^\beta \times Id)) \\ &= \exists_\alpha (\llbracket \varphi(x) \rrbracket_{\alpha, \bar{\gamma}}) \\ &= \llbracket \exists_\alpha x \varphi(x) \rrbracket_{\bar{\gamma}}. \end{aligned}$$

□

FOLGERUNG 3.13. Seien $\alpha, \beta, \vec{\gamma} \in On$, $\beta \leq \alpha$, dann gilt

- (i) $\llbracket \forall_\alpha x \varphi \rrbracket_{\vec{\gamma}} \leq \llbracket \forall_\beta x \varphi \rrbracket_{\vec{\gamma}}$,
- (ii) $\llbracket \exists_\beta x \varphi \rrbracket_{\vec{\gamma}} \leq \llbracket \exists_\alpha x \varphi \rrbracket_{\vec{\gamma}}$ und
- (iii) $\llbracket \forall_\alpha x \varphi \rrbracket_{\vec{\gamma}} = \llbracket \forall x \varphi_\alpha(x) \Rightarrow \varphi \rrbracket_{\vec{\gamma}}$.

Beweis: (i) Nach Lemma 3.12(i) und Lemma 2.41 gilt

$$\begin{aligned} \llbracket \forall_\beta z \varphi \rrbracket_{\vec{\gamma}} &= \llbracket \forall_\alpha z \varphi_\beta(z) \Rightarrow \varphi \rrbracket_{\vec{\gamma}} \\ &\geq \llbracket \forall_\alpha z \varphi \rrbracket_{\vec{\gamma}}. \end{aligned}$$

(ii) Diesmal nach Lemma 3.12(ii) und Lemma 2.47 gilt

$$\begin{aligned} \llbracket \exists_\beta z \varphi \rrbracket_{\vec{\gamma}} &= \llbracket \exists_\alpha z \varphi_\beta(z) \wedge \varphi \rrbracket_{\vec{\gamma}} \\ &\leq \llbracket \exists_\alpha z \varphi \rrbracket_{\vec{\gamma}}. \end{aligned}$$

(iii) Für $\beta \leq \alpha$ gilt $\llbracket \forall_\beta x \varphi \rrbracket_{\vec{\gamma}} = \llbracket \forall_\beta x \varphi_\alpha(x) \Rightarrow \varphi \rrbracket_{\vec{\gamma}}$. Nach Definition der Interpretation von unbeschränkten Allquantoren erhalten wir also $\llbracket \forall_\alpha x \varphi \rrbracket_{\vec{\gamma}} \geq \llbracket \forall x \varphi_\alpha(x) \Rightarrow \varphi \rrbracket_{\vec{\gamma}}$. Zusammen mit Teil(i) dieser Folgerung ergibt sich dann ausserdem für $\beta < \alpha$

$$\llbracket \forall_\beta x \varphi_\alpha(x) \Rightarrow \varphi \rrbracket_{\vec{\gamma}} \geq \llbracket \forall_\alpha x \varphi \rrbracket_{\vec{\gamma}}.$$

Diese Gleichung folgt nun direkt aus Lemma 3.12(i) für alle $\beta > \alpha$. Insgesamt gilt dann

$$\llbracket \forall_\alpha x \varphi \rrbracket_{\vec{\gamma}} = \llbracket \forall x \varphi_\alpha(x) \Rightarrow \varphi \rrbracket_{\vec{\gamma}}.$$

□

Nach Folgerung 3.13(i) und Satz 2.44 reicht es nun aus Aussagen confinal auf ihre Gültigkeit zu untersuchen: Sei $\vec{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ und $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ mit $\beta_i \leq \alpha_i$ für $i = 1 \dots n$, und gelte $\llbracket \varphi \rrbracket_{\vec{\alpha}} = \mathbf{true}_{\vec{\alpha}}$, dann gilt auch $\llbracket \varphi \rrbracket_{\vec{\beta}} = \mathbf{true}_{\vec{\beta}}$. Insbesondere gilt dann $\mathcal{E} \models \varphi(\vec{x})$, falls $\llbracket \varphi \rrbracket_{\vec{\alpha}} = \mathbf{true}_{\vec{\alpha}}$ confinal in den Ordinalzahlen gilt.

FOLGERUNG 3.14. Sei $\alpha \in On$, dann $\mathcal{E} \models (x_1 \in x_2 \wedge \varphi_{\alpha+1}(x_2)) \Rightarrow \varphi_\alpha(x_1)$.

Beweis: Sei $\beta_1, \beta_2 \in On$ mit $\beta_1, \beta_2 \geq \alpha$, dann gilt

$$\llbracket (x_1 \in x_2 \wedge \varphi_{\alpha+1}(x_2)) \Rightarrow \varphi_\alpha(x_1) \rrbracket_{\beta_1, \beta_2} = \llbracket \varphi_{\alpha+1}(x_2) \Rightarrow (x_1 \in x_2 \Rightarrow \varphi_\alpha(x_1)) \rrbracket_{\beta_1, \beta_2}.$$

Nach Folgerung 3.8 ist letzteres gerade $\mathbf{true}_{\beta_1, \beta_2}$ genau dann, wenn $\llbracket x_1 \in x_2 \Rightarrow \varphi_\alpha(x_1) \rrbracket_{\beta_1, \alpha+1} = \mathbf{true}_{\beta_1, \alpha+1}$. Dies gilt nun aber nach Folgerung 3.11. Damit gilt die Behauptung.

□

Die nächste Folgerung wird unser Haupthilfsmittel sein, aus der 'lokalen' Gültigkeit der ZF-Axiome, deren 'globale' Gültigkeit zu folgern.

FOLGERUNG 3.15. Seien $\alpha, \vec{\gamma} \in On$, dann gilt

- (i) $\llbracket \forall z(z \in x \Rightarrow \varphi) \rrbracket_{\alpha+1, \vec{\gamma}} = \llbracket \forall_\alpha z(z \in x \Rightarrow \varphi) \rrbracket_{\alpha+1, \vec{\gamma}}$
- (ii) $\llbracket \exists z z \in x \wedge \varphi \rrbracket_{\alpha+1, \vec{\gamma}} = \llbracket \exists_\alpha z z \in x \wedge \varphi \rrbracket_{\alpha+1, \vec{\gamma}}$.

Beweis: (i) Nach Definition der Interpretation unbeschränkter Quantoren, erhalten wir direkt $\llbracket \forall z(z \in x \Rightarrow \varphi) \rrbracket_{\alpha+1, \vec{\gamma}} \leq \llbracket \forall_\alpha z(z \in x \Rightarrow \varphi) \rrbracket_{\alpha+1, \vec{\gamma}}$. Sei nun $\beta > \alpha + 1$: Dann gilt nach Folgerung 3.11

$$\begin{aligned} \llbracket z \in x \Rightarrow \varphi \rrbracket_{\beta, \alpha+1, \vec{\gamma}} &= \llbracket (z \in x \wedge \varphi_\alpha(z)) \Rightarrow \varphi \rrbracket_{\beta, \alpha+1, \vec{\gamma}} \\ &= \llbracket \varphi_\alpha(z) \Rightarrow (z \in x \Rightarrow \varphi) \rrbracket_{\beta, \alpha+1, \vec{\gamma}}. \end{aligned}$$

Nach dieser Gleichung und Lemma 3.12(i) gilt dann, dass

$$\begin{aligned} \llbracket \forall \alpha z (z \in x \Rightarrow \varphi) \rrbracket_{\alpha+1, \vec{\gamma}} &= \llbracket \forall \beta z (\varphi_\alpha(z) \Rightarrow (z \in x \Rightarrow \varphi)) \rrbracket_{\alpha+1, \beta, \vec{\gamma}} \\ &= \llbracket \forall \beta z (z \in x \Rightarrow \varphi) \rrbracket_{\alpha+1, \vec{\gamma}}. \end{aligned}$$

Für $\beta < \alpha + 1$ erhalten wir nach Lemma 3.13(i), dass

$$\llbracket \forall \beta z (z \in x \Rightarrow \varphi) \rrbracket_{\alpha+1, \vec{\gamma}} \geq \llbracket \forall \alpha z (z \in x \Rightarrow \varphi) \rrbracket_{\alpha+1, \vec{\gamma}}.$$

Insgesamt erhalten wir also $\llbracket \forall z (z \in x \Rightarrow \varphi) \rrbracket_{\alpha+1, \vec{\gamma}} = \llbracket \forall \alpha z (z \in x \Rightarrow \varphi) \rrbracket_{\alpha+1, \vec{\gamma}}$.

(ii) Dieser Teil des Beweis läuft ähnlich wie der erste: Nach Definition der Interpretation unbeschränkter Quantoren, erhalten wir direkt $\llbracket \exists z z \in x \wedge \varphi \rrbracket_{\alpha+1, \vec{\gamma}} \geq \llbracket \exists \alpha z z \in x \wedge \varphi \rrbracket_{\alpha+1, \vec{\gamma}}$. Sei nun wieder $\beta > \alpha + 1$. Dann gilt nach Folgerung 3.11, dass

$$\llbracket z \in x \wedge \varphi \rrbracket_{\beta, \alpha+1, \vec{\gamma}} = \llbracket z \in x \wedge \varphi_\alpha(z) \wedge \varphi \rrbracket_{\beta, \alpha+1, \vec{\gamma}}$$

Mit Lemma 3.12(i) gilt

$$\begin{aligned} \llbracket \exists \alpha z z \in x \wedge \varphi \rrbracket_{\alpha+1, \vec{\gamma}} &= \llbracket \exists \beta z (\varphi_\alpha(z) \wedge z \in x \wedge \varphi) \rrbracket_{\alpha+1, \vec{\gamma}} \\ &= \llbracket \exists \beta z z \in x \wedge \varphi \rrbracket_{\alpha+1, \vec{\gamma}}. \end{aligned}$$

Für $\beta < \alpha$ erhalten wir direkt aus Folgerung 3.13(ii), dass

$$\llbracket \exists \beta z z \in x \wedge \varphi \rrbracket_{\alpha+1, \vec{\gamma}} \leq \llbracket \exists \alpha z z \in x \wedge \varphi \rrbracket_{\alpha+1, \vec{\gamma}}.$$

Damit gilt $\llbracket \exists z z \in x \wedge \varphi \rrbracket_{\alpha+1, \vec{\gamma}} = \llbracket \exists \alpha z z \in x \wedge \varphi \rrbracket_{\alpha+1, \vec{\gamma}}$. □

5. Ableitungsregeln

Damit wir nun wirklich Mengenlehre in diesen Konstruktionen betreiben können, müssen wir zeigen, dass die Regel der predikativen Ableitungen hier gelten. Diese Regeln sind gerade Regeln intuitionistischer propositioneller Ableitungen, der Modus Ponens (R0), die predikativen Regeln (R1)-(R4) und die Gleichheitsregel (R5):

$$\begin{array}{ll} \text{(R0)} \quad \frac{\varphi \quad \varphi \Rightarrow \psi}{\psi} & \text{(R3)} \quad \frac{\psi \Rightarrow \varphi}{\psi \Rightarrow \forall x \varphi} \\ \text{(R1)} \quad \frac{\forall x \varphi}{\varphi(t)} & \text{(R4)} \quad \frac{\varphi \Rightarrow \psi}{\exists x \varphi \Rightarrow \psi} \\ \text{(R2)} \quad \frac{\varphi(t)}{\exists x \varphi} & \text{(R5)} \quad \frac{x = y \quad \varphi(x)}{\varphi(y)} \end{array}$$

wobei x nicht frei in ψ vorkommt.

Tatsächlich gelten die Regel intuitionistischer propositioneller Ableitungen, da $Hom(A, \Omega)$ nach Theorem 2.35 eine Heyting-Algebra ist. Wir wollen nun die restlichen fünf Regeln der Reihe nach beweisen. Für den Modus Ponens (R0) seien nun zwei \in -Formeln φ und ψ gegeben mit $\llbracket \varphi \rrbracket_{\vec{\alpha}} = \mathbf{true}_{\vec{\alpha}}$ und $\llbracket \varphi \Rightarrow \psi \rrbracket_{\vec{\alpha}} = \mathbf{true}_{\vec{\alpha}}$. Nach Lemma 2.32 gilt dann, dass $\llbracket \varphi \rrbracket_{\vec{\alpha}} \leq \llbracket \psi \rrbracket_{\vec{\alpha}}$. Damit ist also $\mathbf{true}_{\vec{\alpha}} \leq \llbracket \psi \rrbracket_{\vec{\alpha}}$. Da aber bekanntlich $\mathbf{true}_{\vec{\alpha}}$ der maximale Morphismus bezüglich \leq ist, gilt also Gleichheit: $\mathbf{true}_{\vec{\alpha}} = \llbracket \psi \rrbracket_{\vec{\alpha}}$. Um daraus die Gültigkeit von Modus ponens zu folgern, müssen wir noch ein weiter kurze Zwischenbetrachtung vornehmen: Seien $\vec{\alpha}$ und $\vec{\beta}$ zwei Tupel von Ordinalzahlen, wobei für alle i $\beta_i \geq 1$ gelte. Sei ferner π die Projektion $V_{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} \rightarrow V_{\vec{\alpha}}$. Ist π dann ein Epimorphismus? Sei $i_1^{\vec{\beta}} : 1 \rightarrow V_{\vec{\beta}}$ der

Morphismus $(i_1^{\beta_1}, \dots, i_1^{\beta_n})$. Dann gibt es nach Definition des Produktes einen Morphismus $f : V_{\vec{\alpha}} \rightarrow V_{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})}$ mit $\pi \circ f = Id_{\vec{\alpha}}$ und $\pi_1 \circ f = i_1^{\vec{\beta}} \circ !$, wobei π_1 die Projektion $V_{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} \rightarrow V_{\vec{\beta}}$ ist. Damit gibt es also einen Morphismus f , so dass $\pi \circ f = Id_{\vec{\alpha}}$ ist. Damit ist π ein Epimorphismus. Nun können wir schließlich folgern, dass Modens Ponens gilt:

SATZ 3.16. Seien φ, ψ zwei \in -Formeln, falls $\mathcal{E} \models \varphi$ und $\mathcal{E} \models \varphi \Rightarrow \psi$ gilt, dann gilt auch $\mathcal{E} \models \psi$.

Beweis: Seien nun (z_1, \dots, z_m) die freien Variablen von φ , und (x_1, \dots, x_n) die freien Variablen von ψ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit, seien $(x_1, \dots, x_n, z_k, \dots, z_m)$ die freien Variablen von $\varphi \Rightarrow \psi$. Sei nun $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ein Tupel von Ordinalzahlen. Sei nun ein beliebiges weiteres Tupel $\vec{\beta} = (\beta_k, \dots, \beta_m)$ von Ordinalzahlen gegeben, wobei $\beta_i \geq 1$ gelte. Dann gilt nach Voraussetzung, dass

$$\llbracket \varphi \Rightarrow \psi \rrbracket_{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \mathbf{true}_{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})}.$$

Da nach Voraussetzung ebenfalls $\llbracket \varphi \rrbracket_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \vec{\beta})} = \mathbf{true}_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \vec{\beta})}$ für ein gewisses l gilt, erhalten wir nun

$$\begin{aligned} \llbracket \varphi \rrbracket_{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} &= \llbracket \varphi \rrbracket_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \vec{\beta})} \circ \pi \\ &= \mathbf{true}_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \vec{\beta})} \circ \pi \\ &= \mathbf{true}_{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})}, \end{aligned}$$

wobei π die Projektion $V_{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} \rightarrow V_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \vec{\beta})}$ ist. Wie wir eben festgestellt haben, gilt dann

$$\llbracket \psi \rrbracket_{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \mathbf{true}_{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})}.$$

Da $\llbracket \psi \rrbracket_{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \llbracket \psi \rrbracket_{\vec{\alpha}} \circ \pi_2$ gilt, wobei π_2 die Projektion $V_{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} \rightarrow V_{\vec{\alpha}}$ ist, erhalten wir dann:

$$\mathbf{true}_{\vec{\alpha}} \circ \pi_2 = \mathbf{true}_{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \llbracket \psi \rrbracket_{\vec{\alpha}} \circ \pi_2.$$

Weil π_2 ein Epimorphismus ist, gilt dann $\llbracket \psi \rrbracket_{\vec{\alpha}} = \mathbf{true}_{\vec{\alpha}}$.

□

Das nächste Lemma beweist nun die Regeln (R1) und (R2). Wir werden jeweils die Natürlichkeit der Substitution aus Satz 3.2 benutzen und dann die Zusammenhang zwischen innerer und externer Logik für den All- bzw. Existenzquantor aus den Lemmata 2.42 und 2.48 anwenden.

LEMMA 3.17. Sei t ein Term, φ eine \in -Formel, und jede Variable in t ist nicht bebunden in φ , dann gilt:

- (1) Falls $\mathcal{E} \models \forall x_1 \varphi$, dann gilt $\mathcal{E} \models \varphi(t)$.
- (2) Falls $\mathcal{E} \models \varphi(t)$, dann gilt $\mathcal{E} \models \exists x_1 \varphi$.

Beweis: (i) Sei $t = x_j$. Wir wollen nun zeigen, dass $\llbracket \varphi \frac{x_1}{x_j} \rrbracket_{\vec{\gamma}} = \mathbf{true}_{\vec{\gamma}}$ gilt. Nach Satz 3.2 gilt dann $\llbracket \varphi \rrbracket_{\gamma_j, \vec{\gamma}} \circ (\pi_j, Id) = \llbracket \varphi \frac{x_1}{x_j} \rrbracket_{\vec{\gamma}}$. Wir erhalten also $\llbracket \varphi \frac{x_1}{x_j} \rrbracket_{\vec{\gamma}} = \mathbf{true}_{\vec{\gamma}}$, falls wir zeigen können, dass $\llbracket \varphi \rrbracket_{\gamma_j, \vec{\gamma}} = \mathbf{true}_{\gamma_j, \vec{\gamma}}$ gilt. Da nach Voraussetzung aber $\llbracket \forall x_1 \varphi \rrbracket_{\vec{\gamma}} = \mathbf{true}_{\vec{\gamma}}$ gilt, erhalten wir nach der Definition der Interpretation unbeschränkter Allquantor, dass für alle $\alpha \in On$ gilt $\llbracket \forall x_1 \varphi \rrbracket_{\vec{\gamma}} = \mathbf{true}_{\vec{\gamma}}$. Nach Lemma 2.42 gilt dies genau dann, wenn für alle $\alpha \in On$ gilt $\llbracket \varphi \rrbracket_{\alpha, \vec{\gamma}} = \mathbf{true}_{\alpha, \vec{\gamma}}$. Also insbesondere auch für $\alpha = \gamma_j$.

(ii) Sei nun wieder $t = x_j$. Wir wollen nun zeigen, dass für beliebige $\vec{\gamma}$ $\llbracket \exists x_1 \varphi \rrbracket_{\vec{\gamma}} =$

$\mathbf{true}_{\vec{\gamma}}$ gil. Dafür würde reichen, dass wir für ein $\alpha \in On$ $\llbracket \exists_{\alpha} x_1 \varphi \rrbracket_{\vec{\gamma}} = \mathbf{true}_{\vec{\gamma}}$ zeigen können. Nach Satz 3.2 gilt wiederum $\llbracket \varphi \rrbracket_{\gamma_j, \vec{\gamma}} \circ (\pi_j, Id) = \llbracket \varphi \frac{x_1}{x_j} \rrbracket_{\vec{\gamma}}$. Nach Voraussetzung aber gilt, dass $\llbracket \varphi \frac{x_1}{x_j} \rrbracket_{\vec{\gamma}} = \mathbf{true}_{\vec{\gamma}}$. Aus Lemma 2.48 folgt dann, dass $\llbracket \exists_{\gamma_j} x_1 \varphi \rrbracket_{\vec{\gamma}} = \mathbf{true}_{\vec{\gamma}}$. Damit gilt also auch $\llbracket \exists x_1 \varphi \rrbracket_{\vec{\gamma}} = \mathbf{true}_{\vec{\gamma}}$ und so die Behauptung. \square

Das folgende Lemma wird uns beim Beweis der Regeln (R3)-(R4) helfen. Später wird es nochmals nützlich sein beim Beweis der Gültigkeit der ZF-Axiome.

LEMMA 3.18. Seien φ, ψ zwei \in -Formeln, x_1 nicht frei in ψ und $\vec{\gamma} \in On$, dann gilt

- (i) $\llbracket \psi \Rightarrow \forall_{\alpha} x_1 \varphi \rrbracket_{\vec{\gamma}} = \mathbf{true}_{\vec{\gamma}}$ für alle $\alpha \in On$ genau dann, wenn $\llbracket \psi \Rightarrow \forall x_1 \varphi \rrbracket = \mathbf{true}$.
- (ii) $\llbracket \exists_{\alpha} x_1 \varphi \Rightarrow \psi \rrbracket_{\vec{\gamma}} = \mathbf{true}_{\vec{\gamma}}$ für alle $\alpha \in On$ genau dann, wenn $\llbracket \exists x_1 \varphi \Rightarrow \psi \rrbracket = \mathbf{true}$.

Beweis: (i) Wir erhalten nun aus den bisherigen Ergebnissen:

$$\begin{aligned} & \forall \alpha \in On \llbracket \psi \Rightarrow \forall_{\alpha} x_1 \varphi \rrbracket_{\vec{\gamma}} = \mathbf{true}_{\vec{\gamma}} \\ & \text{gdw. } \forall \alpha \in On \llbracket \psi \rrbracket_{\vec{\gamma}} \leq \llbracket \forall_{\alpha} x_1 \varphi \rrbracket_{\vec{\gamma}} && \text{nach Lemma 2.32} \\ & \text{gdw. } \llbracket \psi \rrbracket_{\vec{\gamma}} \leq \bigwedge_{\alpha \in On} \llbracket \forall_{\alpha} x_1 \varphi \rrbracket_{\vec{\gamma}} && \text{nach Definition von } \bigwedge \\ & \text{gdw. } \llbracket \psi \rrbracket_{\vec{\gamma}} \leq \llbracket \forall x_1 \varphi \rrbracket_{\vec{\gamma}} && \text{nach Interpretation von } \forall \\ & \text{gdw. } \llbracket \psi \Rightarrow \forall x_1 \varphi \rrbracket_{\vec{\gamma}} = \mathbf{true}_{\vec{\gamma}} && \text{nach Lemma 2.32.} \end{aligned}$$

(ii) Ähnlich wie in (i) erhalten wir:

$$\begin{aligned} & \forall \alpha \in On \llbracket \exists_{\alpha} x_1 \varphi \Rightarrow \psi \rrbracket_{\vec{\gamma}} = \mathbf{true}_{\vec{\gamma}} \\ & \text{gdw. } \forall \alpha \in On \llbracket \exists_{\alpha} x_1 \varphi \rrbracket_{\vec{\gamma}} \leq \llbracket \psi \rrbracket_{\vec{\gamma}} && \text{nach Lemma 2.32} \\ & \text{gdw. } \bigvee_{\alpha \in On} \llbracket \exists_{\alpha} x_1 \varphi \rrbracket_{\vec{\gamma}} \leq \llbracket \psi \rrbracket_{\vec{\gamma}} && \text{nach Definition von } \bigvee \\ & \text{gdw. } \llbracket \exists x_1 \varphi \rrbracket_{\vec{\gamma}} \leq \llbracket \psi \rrbracket_{\vec{\gamma}} && \text{nach Interpretation von } \exists \\ & \text{gdw. } \llbracket \exists x_1 \varphi \Rightarrow \psi \rrbracket_{\vec{\gamma}} = \mathbf{true}_{\vec{\gamma}} && \text{nach Lemma 2.32.} \end{aligned}$$

\square

SATZ 3.19. Seien φ und ψ zwei \in -Formeln und x_1 kommt nicht frei in ψ vor, dann gilt

- (i) $\mathcal{E} \models \psi \Rightarrow \varphi$ genau dann, wenn $\mathcal{E} \models \psi \Rightarrow \forall x_1 \varphi$ und
- (ii) $\mathcal{E} \models \varphi \Rightarrow \psi$ genau dann, wenn $\mathcal{E} \models \exists x_1 \varphi \Rightarrow \psi$.

Beweis: (i) Sei $\vec{\gamma}$ beliebig. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} & \forall \beta \in On \llbracket \psi \Rightarrow \varphi \rrbracket_{\beta, \vec{\gamma}} = \mathbf{true}_{\beta, \vec{\gamma}} \\ & \text{gdw. } \forall \beta \in On \llbracket \psi \rrbracket_{\beta, \vec{\gamma}} \leq \llbracket \varphi \rrbracket_{\beta, \vec{\gamma}} && \text{nach Lemma 2.32} \\ & \text{gdw. } \forall \beta \in On \llbracket \psi \rrbracket_{\vec{\gamma}} \circ \pi_{\vec{\gamma}} \leq \llbracket \varphi \rrbracket_{\beta, \vec{\gamma}} && \text{da } x_1 \text{ nicht frei in } \psi \\ & \text{gdw. } \forall \beta \in On \llbracket \psi \rrbracket_{\vec{\gamma}} \leq \llbracket \forall_{\beta} x_1 \varphi \rrbracket_{\vec{\gamma}} && \text{nach Satz 2.44} \\ & \text{gdw. } \forall \beta \in On \llbracket \psi \Rightarrow \forall_{\beta} x_1 \varphi \rrbracket_{\vec{\gamma}} = \mathbf{true}_{\vec{\gamma}} && \text{nach Lemma 2.32} \\ & \text{gdw. } \llbracket \psi \Rightarrow \forall x_1 \varphi \rrbracket_{\vec{\gamma}} = \mathbf{true}_{\vec{\gamma}} && \text{nach Lemma 3.18(i).} \end{aligned}$$

Nach Definition von Gültigkeit in \mathcal{E} gilt also $\mathcal{E} \models \psi \Rightarrow \varphi$ genau dann, wenn $\mathcal{E} \models \psi \Rightarrow \forall x_1 \varphi$ gilt.

(ii) Sei $\vec{\gamma}$ wieder beliebig. Wir erhalten wiederum:

$$\begin{array}{ll}
\forall \beta \in On \llbracket \varphi \Rightarrow \psi \rrbracket_{\beta, \vec{\gamma}} = \mathbf{true}_{\beta, \vec{\gamma}} & \\
\text{gdw. } \forall \beta \in On \llbracket \varphi \rrbracket_{\beta, \vec{\gamma}} \leq \llbracket \psi \rrbracket_{\beta, \vec{\gamma}} & \text{nach Lemma 2.32} \\
\text{gdw. } \forall \beta \in On \llbracket \varphi \rrbracket_{\beta, \vec{\gamma}} \leq \llbracket \psi \rrbracket_{\vec{\gamma}} \circ \pi_{\vec{\gamma}} & \text{da } x_1 \text{ nicht frei in } \psi \\
\text{gdw. } \forall \beta \in On \llbracket \exists \beta x_1 \varphi \rrbracket_{\vec{\gamma}} \leq \llbracket \psi \rrbracket_{\vec{\gamma}} & \text{nach Satz 2.51} \\
\text{gdw. } \forall \beta \in On \llbracket \exists \beta x_1 \varphi \Rightarrow \psi \rrbracket_{\vec{\gamma}} = \mathbf{true}_{\vec{\gamma}} & \text{nach Lemma 2.32} \\
\text{gdw. } \llbracket \exists x_1 \varphi \Rightarrow \psi \rrbracket_{\vec{\gamma}} = \mathbf{true}_{\vec{\gamma}} & \text{nach Lemma 3.18(ii)}.
\end{array}$$

Damit gilt nun auch $\mathcal{E} \models \varphi \Rightarrow \psi$ genau dann, wenn $\mathcal{E} \models \exists x_1 \varphi \Rightarrow \psi$.

□

Damit haben die Regel (R3) und (R4) gezeigt. Wende wir uns nun (R5). Da wir Gültigkeit nur konfinal zeigen müssen, beweist das folgende Lemma die Gültigkeit dieser Regel.

LEMMA 3.20. Sei $\alpha, \vec{\gamma} \in On$, φ eine \in -Formel, dann gilt

$$\llbracket (x_1 = x_2 \wedge \varphi(x_1)) \Rightarrow \varphi(x_2) \rrbracket_{\alpha, \vec{\gamma}, \alpha} = \mathbf{true}_{\alpha, \vec{\gamma}, \alpha}.$$

Beweis: Sei $m : T \hookrightarrow V_\alpha \times V_{\vec{\gamma}}$ das zu $\llbracket \varphi \rrbracket_{\alpha, \vec{\gamma}}$ gehörige Unterobjekt. Sei nun

$$\begin{array}{ccc}
P & \xrightarrow{l_2} & T \times V_\alpha \\
\downarrow l_1 & & \downarrow m \times Id \\
V_\alpha \times V_{\vec{\gamma}} & \xrightarrow{(\pi_1, \pi_2, \pi_1)} & V_\alpha \times V_{\vec{\gamma}} \times V_\alpha.
\end{array}$$

ein Pullback-Quadrat. Offensichtlich gilt dabei $l_1 = m \circ l_2$. Nach Lemma 2.29 ist $(m \times Id) \circ l_2$ das zu $\llbracket (x_1 = x_2 \wedge \varphi(x_1)) \rrbracket_{\alpha, \vec{\gamma}, \alpha}$ gehörige Unterobjekt. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\llbracket \varphi(x_2) \rrbracket_{\alpha, \vec{\gamma}, \alpha} \circ (m \times Id) \circ l_2 &= \llbracket \varphi(x_2) \rrbracket_{\alpha, \vec{\gamma}, \alpha} \circ (\pi_1, \pi_2, \pi_1) \circ l_1 \\
&= \llbracket \varphi(x_1) \rrbracket_{\alpha, \vec{\gamma}} \circ l_1 \\
&= \llbracket \varphi(x_1) \rrbracket_{\alpha, \vec{\gamma}} \circ m \circ l_2 \\
&= \mathbf{true}_T \circ l_2 \\
&= \mathbf{true}_P.
\end{aligned}$$

Nach Satz 2.28 und Lemma 2.32 gilt dann

$$\llbracket (x_1 = x_2 \wedge \varphi(x_1)) \Rightarrow \varphi(x_2) \rrbracket_{\alpha, \vec{\gamma}, \alpha} = \mathbf{true}_{\alpha, \vec{\gamma}, \alpha}.$$

□

Wir erhalten ebenfalls direkt aus Lemma 3.20 und Folgerung 3.13(iii)

FOLGERUNG 3.21. Sei $\alpha, \vec{\gamma} \in On$, φ eine \in -Formel, dann gilt

$$\llbracket \forall x_2 (x_1 = x_2) \Rightarrow \varphi \rrbracket_{\alpha, \vec{\gamma}} = \llbracket \forall_\alpha x_2 (x_1 = x_2) \Rightarrow \varphi \rrbracket_{\alpha, \vec{\gamma}}.$$

Für die Beweise der ZF-Axiome benötigen wir noch folgendes Lemma.

LEMMA 3.22. Sei $\lambda \in On$ mit $\lim(\lambda)$, φ und ψ zwei \in -Formeln und x_1 kommt nicht frei in ψ vor, dann gilt

- (i) $\llbracket \psi \Rightarrow \forall_\alpha x_1 \varphi \rrbracket_{\bar{\gamma}} = \mathbf{true}_{\bar{\gamma}}$ für alle $\alpha < \lambda$ genau dann, wenn $\llbracket \psi \Rightarrow \forall_\lambda x_1 \varphi \rrbracket_{\bar{\gamma}} = \mathbf{true}_{\bar{\gamma}}$.
- (ii) $\llbracket \exists_\alpha x_1 \varphi \Rightarrow \psi \rrbracket_{\bar{\gamma}} = \mathbf{true}_{\bar{\gamma}}$ für alle $\alpha < \lambda$ genau dann, wenn $\llbracket \exists_\lambda x_1 \varphi \Rightarrow \psi \rrbracket_{\bar{\gamma}} = \mathbf{true}_{\bar{\gamma}}$.

Beweis: (i) Für alle $\alpha < \lambda$ gilt nach Lemma 2.32, dass $\llbracket \psi \Rightarrow \forall_\alpha x_1 \varphi \rrbracket_{\bar{\gamma}} = \mathbf{true}_{\bar{\gamma}}$ genau dann gilt, wenn $\llbracket \psi \rrbracket_{\bar{\gamma}} \leq \llbracket \forall_\alpha x_1 \varphi \rrbracket_{\bar{\gamma}}$. Nach Satz 2.44 gilt dies nun wieder genau dann, wenn $\llbracket \psi \rrbracket_{\bar{\gamma}} \circ \pi_{\bar{\gamma}} \leq \llbracket \varphi \rrbracket_{\alpha, \bar{\gamma}}$. Nach Folgerung 3.9 gilt dies nun genau dann für alle $\alpha < \lambda$, wenn $\llbracket \psi \rrbracket_{\bar{\gamma}} \circ \pi_{\bar{\gamma}} \leq \llbracket \varphi \rrbracket_{\lambda, \bar{\gamma}}$ gilt. Dies wiederum gilt nach Satz 2.44 genau dann, wenn $\llbracket \psi \rrbracket_{\bar{\gamma}} \leq \llbracket \forall_\lambda \varphi \rrbracket_{\bar{\gamma}}$. Und schließlich nach Lemma 2.32 gilt dies, genau dann wenn $\llbracket \psi \Rightarrow \forall_\lambda \varphi \rrbracket_{\bar{\gamma}} = \mathbf{true}_{\bar{\gamma}}$.

(ii) Wir gehen genauso vor wie in (i). Nach Lemma 2.32 gilt für alle $\alpha < \lambda$ die Gleichung $\llbracket \exists_\alpha x_1 \varphi \Rightarrow \psi \rrbracket_{\bar{\gamma}} = \mathbf{true}_{\bar{\gamma}}$ genau dann, wenn die Ungleichung $\llbracket \exists_\alpha x_1 \varphi \rrbracket_{\bar{\gamma}} \leq \llbracket \psi \rrbracket_{\bar{\gamma}}$ gilt. Diese Ungleichung gilt nun nach Satz 2.51 genau dann, wenn $\llbracket \varphi \rrbracket_{\alpha, \bar{\gamma}} \leq \llbracket \psi \rrbracket_{\bar{\gamma}} \circ \pi_{\bar{\gamma}}$ gilt. Nach Folgerung 3.9 gilt dies nun für alle $\alpha < \lambda$ genau dann, wenn $\llbracket \varphi \rrbracket_{\lambda, \bar{\gamma}} \leq \llbracket \psi \rrbracket_{\bar{\gamma}} \circ \pi_{\bar{\gamma}}$ gilt. Dies wiederum gilt nach 2.51 genau dann, wenn $\llbracket \exists_\lambda x_1 \varphi \rrbracket_{\bar{\gamma}} \leq \llbracket \psi \rrbracket_{\bar{\gamma}}$. Nach Lemma 2.32 gilt dies nun genau dann, wenn $\llbracket \exists_\lambda x_1 \varphi \Rightarrow \psi \rrbracket_{\bar{\gamma}} = \mathbf{true}_{\bar{\gamma}}$.

□

6. Die ZF-Axiome

In diesem Abschnitt werden nun die ZF-Axiome in unserem Modell bewiesen. Wir werden hier eine intuitionistische Version der ZF-Axiome beweisen. Nimmt man an, dass unserer betrachter Topos boolesch ist, folgen daraus direkt die bekannten ZF-Axiome.

(Ex)	$\exists x_1 \forall x_2 \neg x_2 \in x_1$
(Ext)	$\forall x_1 \forall x_2 x_1 = x_2 \Leftrightarrow (\forall x_3 x_3 \in x_1 \Leftrightarrow x_3 \in x_2)$
(Paar)	$\forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 x_1 \in x_3 \wedge x_2 \in x_3$
(\cup -Ax)	$\forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 x_3 \in x_2 \Leftrightarrow (\exists x_4 x_4 \in x_1 \wedge x_3 \in x_4)$
(Pot)	$\forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 x_3 \in x_2 \Leftrightarrow (\forall x_4 x_4 \in x_3 \Rightarrow x_4 \in x_1)$
(Aus)	$\forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 x_3 \in x_2 \Leftrightarrow (x_3 \in x_1 \wedge \varphi)$
(Inf)	$\exists x_1 \exists x_2 x_2 \in x_1 \wedge \forall x_3 x_3 \in x_1 \Rightarrow \exists x_4 x_4 \in x_2 \wedge x_3 \in x_4$
(\in -Ind)	$(\forall x_1 \forall x_2 (x_2 \in x_1 \Rightarrow \varphi(x_2)) \Rightarrow \varphi(x_1)) \Rightarrow \forall x_3 \varphi(x_3)$
(Ers)	$\forall x_1 (\forall x_2 x_2 \in x_1 \Rightarrow \exists x_3 \varphi) \Rightarrow (\exists x_4 \forall x_5 x_5 \in x_1 \Rightarrow \exists x_6 x_6 \in x_4 \wedge \varphi)$

SATZ 3.23. $\mathcal{E} \models (Ex)$.

Beweis: Nach Definition der Negation gilt $\llbracket \forall x_2 \neg x_2 \in x_1 \rrbracket_{\alpha+1} = \llbracket \forall x_2 x_2 \in x_1 \Rightarrow \perp \rrbracket_{\alpha+1}$. Damit gilt nach Folgerung 3.15(i), dass $\llbracket \forall x_2 x_2 \in x_1 \Rightarrow \perp \rrbracket_{\alpha+1} = \llbracket \forall_\alpha x_2 x_2 \in x_1 \Rightarrow \perp \rrbracket_{\alpha+1}$. Ferner gilt nach Lemma 2.32 und da $\mathbf{false}_{\alpha+1, \alpha}$ das Minimum der entsprechende Heyting-Algebra ist, dass $\llbracket \perp \Rightarrow x_2 \in x_1 \rrbracket_{\alpha+1, \alpha} = \mathbf{true}_{\alpha+1, \alpha}$. Damit gilt insgesamt nach Lemma 3.4

$$\llbracket \exists_{\alpha+1} x_1 \forall x_2 \neg x_2 \in x_1 \rrbracket = \llbracket \exists_{\alpha+1} x_1 \forall_\alpha x_2 x_2 \in x_1 \Leftrightarrow \perp \rrbracket = \mathbf{true}.$$

Damit gilt nach Definition der Interpretation unbeschränkter Existenzquantoren, dass $\mathcal{E} \models (Ex)$.

□

SATZ 3.24. $\mathcal{E} \models (Ext)$.

Beweis: Nach Lemma 3.3, wissen wir, dass

$$\llbracket \forall_{\alpha+1} x \forall_{\alpha+1} y \ x = y \Leftrightarrow (\forall_{\alpha} z (z \in x \Leftrightarrow z \in y)) \rrbracket = \mathbf{true}.$$

Nach Folgerung 3.15(i) gilt dann

$$\llbracket \forall_{\alpha} z (z \in x \Leftrightarrow z \in y) \rrbracket_{\alpha+1, \alpha+1} = \llbracket \forall z (z \in x \Leftrightarrow z \in y) \rrbracket_{\alpha+1, \alpha+1}.$$

Diese beiden Aussagen zusammen ergibt dann

$$\llbracket \forall_{\alpha+1} x \forall_{\alpha+1} y \ x = y \Leftrightarrow (\forall z (z \in x \Leftrightarrow z \in y)) \rrbracket_{\alpha+1, \alpha+1} = \mathbf{true}.$$

Nach Folgerung 3.13(i) gilt dann $\beta_1, \beta_2 \in On$

$$\llbracket \forall_{\beta_1} x \forall_{\beta_2} y \ x = y \Leftrightarrow (\forall z (z \in x \Leftrightarrow z \in y)) \rrbracket = \mathbf{true}.$$

Nach Definition der Interpretation unbeschränkter Quantoren, gilt dann $\mathcal{E} \models (Ext)$. □

SATZ 3.25. $\mathcal{E} \models (Paar)$.

Beweis: Wir wollen also nun zeigen, dass $\mathcal{E} \models \exists x_3 \ x_1 \in x_3 \wedge x_2 \in x_3$. Nach Lemma 3.4 gilt für alle $\alpha \in On$ $\llbracket \exists_{\alpha+1} x_4 \forall_{\alpha} x_5 \ x_5 \in x_4 \rrbracket = \mathbf{true}$ und so $\mathcal{E} \models \exists x_4 \forall x_5 \ \varphi_{\alpha}(x_5) \Rightarrow x_5 \in x_4$. Damit erhalten wir, dass für alle $\alpha \in On$ gilt $\mathcal{E} \models \exists x_3 \ (\varphi_{\alpha}(x_1) \wedge \varphi_{\alpha}(x_2)) \Rightarrow (x_1 \in x_3 \wedge x_2 \in x_3)$. Damit gilt für alle α dann auch $\llbracket \exists x_3 \ x_1 \in x_3 \wedge x_2 \in x_3 \rrbracket_{\alpha, \alpha} = \mathbf{true}_{\alpha, \alpha}$. Daraus folgt direkt $\mathcal{E} \models \exists x_3 \ x_1 \in x_3 \wedge x_2 \in x_3$. □

SATZ 3.26. $\mathcal{E} \models (\bigcup - Ax)$.

Beweis: Wir wollen nun also $\mathcal{E} \models \exists x_2 \forall x_3 \ x_3 \in x_2 \Leftrightarrow (\exists x_4 \ x_4 \in x_1 \wedge x_3 \in x_4)$ beweisen. Dies wird wieder durch Zurückführung auf Lemma 3.4 geschehen. Sei nun α, γ beliebig. Nach Folgerung 3.14 erhalten wir

$$\mathcal{E} \models (x_4 \in x_1 \wedge x_3 \in x_4 \wedge \varphi_{\alpha+2}(x_1)) \Rightarrow \varphi_{\alpha+1}(x_4)$$

Dann gilt ebenfalls nach Folgerung 3.14

$$\mathcal{E} \models (x_4 \in x_1 \wedge x_3 \in x_4 \wedge \varphi_{\alpha+1}(x_4)) \Rightarrow \varphi_{\alpha}(x_3).$$

Nach Regel (R4) gilt dann ebenfalls

$$\mathcal{E} \models (\exists x_4 \ x_4 \in x_1 \wedge x_3 \in x_4 \wedge \varphi_{\alpha+2}(x_1)) \Rightarrow \varphi_{\alpha}(x_3).$$

Damit gilt nach Lemma 3.12(i)

$$\begin{aligned} & \llbracket \forall x_3 \ (\exists x_4 \ x_4 \in x_1 \wedge x_3 \in x_4) \Rightarrow x_3 \in x_2 \rrbracket_{\alpha+2, \alpha+1} \\ &= \llbracket \forall x_3 \ \varphi_{\alpha}(x_3) \Rightarrow ((\exists x_4 \ x_4 \in x_1 \wedge x_3 \in x_4) \Rightarrow x_3 \in x_2) \rrbracket_{\alpha+2, \alpha+1} \\ &= \llbracket \forall_{\alpha} x_3 \ (\exists x_4 \ x_4 \in x_1 \wedge x_3 \in x_4) \Rightarrow x_3 \in x_2 \rrbracket_{\alpha+2, \alpha+1}. \end{aligned}$$

Aus Folgerung 3.15(i) erhalten wir dann

$$\begin{aligned} & \llbracket \forall x_3 \ x_3 \in x_2 \Rightarrow (\exists x_4 \ x_4 \in x_1 \wedge x_3 \in x_4) \rrbracket_{\alpha+2, \alpha+1} \\ &= \llbracket \forall_{\alpha} x_3 \ x_3 \in x_2 \Rightarrow (\exists x_4 \ x_4 \in x_1 \wedge x_3 \in x_4) \rrbracket_{\alpha+2, \alpha+1}. \end{aligned}$$

Damit gilt insgesamt

$$\begin{aligned} & \llbracket \forall x_3 \ x_3 \in x_2 \Leftrightarrow (\exists x_4 \ x_4 \in x_1 \wedge x_3 \in x_4) \rrbracket_{\alpha+2, \alpha+1} \\ &= \llbracket \forall_{\alpha} x_3 \ x_3 \in x_2 \Leftrightarrow (\exists x_4 \ x_4 \in x_1 \wedge x_3 \in x_4) \rrbracket_{\alpha+2, \alpha+1}. \end{aligned}$$

Zusammem mit Lemma 3.4 folgt dann

$$\begin{aligned} & \llbracket \exists x_2 \forall x_3 x_3 \in x_2 \Leftrightarrow (\exists x_4 x_4 \in x_1 \wedge x_3 \in x_4) \rrbracket_{\alpha+2} \\ & \geq \llbracket \exists_{\alpha+1} x_2 \forall x_3 x_3 \in x_2 \Leftrightarrow (\exists x_4 x_4 \in x_1 \wedge x_3 \in x_4) \rrbracket_{\alpha+2} \\ & = \mathbf{true}_{\alpha+2}. \end{aligned}$$

Damit gilt also $\mathcal{E} \models \exists x_2 \forall x_3 x_3 \in x_2 \Leftrightarrow (\exists x_4 x_4 \in x_1 \wedge x_3 \in x_4)$.

□

LEMMA 3.27. $\mathcal{E} \models (\forall x_2 x_2 \in x_1 \Rightarrow \varphi_\alpha(x_2)) \Rightarrow \varphi_{\alpha+1}(x_1)$.

Beweis: Zuerst verallgemeinern wir Lemma 3.4.

$$(1) \mathcal{E} \models \exists x_3 \varphi_{\alpha+1}(x_3) \wedge \forall x_4 x_4 \in x_3 \Leftrightarrow (x_4 \in x_1 \wedge \varphi_\alpha(x_4))$$

Beweis: Nach Lemma 3.4 gilt

$$\llbracket \exists_{\alpha+1} x_3 \forall_\alpha x_4 x_4 \in x_3 \Leftrightarrow x_4 \in x_1 \rrbracket_\gamma = \mathbf{true}_\gamma.$$

Nun gilt aber nach Folgerung 3.15(i), dass

$$\begin{aligned} \llbracket \forall x_4 x_4 \in x_3 \Rightarrow x_4 \in x_1 \rrbracket_{\gamma, \alpha+1} &= \llbracket \forall_\alpha x_4 x_4 \in x_3 \Rightarrow x_4 \in x_1 \rrbracket_{\gamma, \alpha+1} \\ &= \llbracket \forall_\alpha x_4 x_4 \in x_3 \Rightarrow (x_4 \in x_1 \wedge \varphi_\alpha(x_4)) \rrbracket_{\gamma, \alpha+1}. \end{aligned}$$

Nach Lemma 3.12(i) gilt ausserdem

$$\begin{aligned} \llbracket \forall x_4 (\varphi_\alpha(x_4) \wedge x_4 \in x_1) \Rightarrow x_4 \in x_3 \rrbracket_{\gamma, \alpha+1} &= \llbracket \forall x_4 \varphi_\alpha(x_4) \Rightarrow (x_4 \in x_1 \Rightarrow x_4 \in x_3) \rrbracket_{\gamma, \alpha+1} \\ &= \llbracket \forall_\alpha x_4 x_4 \in x_1 \Rightarrow x_4 \in x_3 \rrbracket_{\gamma, \alpha+1}. \end{aligned}$$

Damit und nach Lemma 3.12(ii) gilt

$$\begin{aligned} & \llbracket \exists x_3 \varphi_{\alpha+1}(x_3) \wedge \forall x_4 x_4 \in x_3 \Leftrightarrow (x_4 \in x_1 \wedge \varphi_\alpha(x_4)) \rrbracket_\gamma \\ &= \llbracket \exists_{\alpha+1} x_3 \forall x_4 x_4 \in x_3 \Leftrightarrow (x_4 \in x_1 \wedge \varphi_\alpha(x_4)) \rrbracket_\gamma \\ &= \llbracket \exists_{\alpha+1} x_3 \forall_\alpha x_4 x_4 \in x_3 \Leftrightarrow x_4 \in x_1 \rrbracket_\gamma \\ &= \mathbf{true}_\gamma. \end{aligned}$$

□(1)

Nach (1) gilt dann,

$$\mathcal{E} \models (\forall x_2 x_2 \in x_1 \Rightarrow \varphi_\alpha(x_2)) \Rightarrow (\exists x_3 \varphi_{\alpha+1}(x_3) \wedge \forall x_4 x_4 \in x_3 \Leftrightarrow x_4 \in x_1).$$

Da $\mathcal{E} \models (Ext)$ folgt dann

$$\mathcal{E} \models (\forall x_2 x_2 \in x_1 \Rightarrow \varphi_\alpha(x_2)) \Rightarrow (\exists x_3 \varphi_{\alpha+1}(x_3) \wedge x_3 = x_1).$$

□

SATZ 3.28. $\mathcal{E} \models (Pot)$.

Beweis: Zu zeigen ist diesmal also $\mathcal{E} \models \exists x_2 \forall x_3 x_3 \in x_2 \Leftrightarrow (\forall x_4 x_4 \in x_3 \Rightarrow x_4 \in x_1)$. Dies geschieht sehr ähnlich wie im Fall von $(\bigcup - Ax)$. Sei nun α, γ beliebig. Nach Folgerung 3.11 und Lemma 3.27 erhalten wir

$$\begin{aligned} \llbracket \forall x_4 x_4 \in x_3 \Rightarrow x_4 \in x_1 \rrbracket_{\gamma, \alpha+1} &\leq \llbracket \forall x_4 x_4 \in x_3 \Rightarrow \varphi_\alpha(x_4) \rrbracket_{\gamma, \alpha+1} \\ &\leq \llbracket \varphi_{\alpha+1}(x_3) \rrbracket_{\gamma, \alpha+1}. \end{aligned}$$

Daher gilt nach Lemma 3.12(i)

$$\begin{aligned} & \llbracket \forall x_3 (\forall x_4 x_4 \in x_3 \Rightarrow x_4 \in x_1) \Rightarrow x_3 \in x_2 \rrbracket_{\alpha+1, \alpha+2} \\ &= \llbracket \forall x_3 \varphi_{\alpha+1}(x_3) \Rightarrow ((\forall x_4 x_4 \in x_3 \Rightarrow x_4 \in x_1) \Rightarrow x_3 \in x_2) \rrbracket_{\alpha+1, \alpha+2} \\ &= \llbracket \forall_{\alpha+1} x_3 (\forall x_4 x_4 \in x_3 \Rightarrow x_4 \in x_1) \Rightarrow x_3 \in x_2 \rrbracket_{\alpha+1, \alpha+2}. \end{aligned}$$

Ebenfalls wie im Beweis des \cup -Axiomes erhalten wir aus Folgerung 3.15(i) dann

$$\begin{aligned} & \llbracket \forall x_3 x_3 \in x_2 \Rightarrow (\forall x_4 x_4 \in x_3 \Rightarrow x_4 \in x_1) \rrbracket_{\alpha+1, \alpha+2} \\ &= \llbracket \forall_{\alpha+1} x_3 x_3 \in x_2 \Rightarrow (\forall x_4 x_4 \in x_3 \Rightarrow x_4 \in x_1) \rrbracket_{\alpha+1, \alpha+2} \end{aligned}$$

und so insgesamt

$$\begin{aligned} & \llbracket \forall x_3 (\forall x_4 x_4 \in x_3 \Rightarrow x_4 \in x_1) \Leftrightarrow x_3 \in x_2 \rrbracket_{\alpha+1, \alpha+2} \\ &= \llbracket \forall_{\alpha+1} x_3 (\forall x_4 x_4 \in x_3 \Rightarrow x_4 \in x_1) \Leftrightarrow x_3 \in x_2 \rrbracket_{\alpha+1, \alpha+2}. \end{aligned}$$

Zusammem mit Lemma 3.4 folgt dann

$$\begin{aligned} & \llbracket \exists x_2 \forall x_3 (\forall x_4 x_4 \in x_3 \Rightarrow x_4 \in x_1) \Leftrightarrow x_3 \in x_2 \rrbracket_{\alpha+1} \\ & \geq \llbracket \exists_{\alpha+2} x_2 \forall_{\alpha+1} x_3 (\forall x_4 x_4 \in x_3 \Rightarrow x_4 \in x_1) \Leftrightarrow x_3 \in x_2 \rrbracket_{\alpha+1} \\ &= \mathbf{true}_{\alpha+1}. \end{aligned}$$

□

SATZ 3.29. $\mathcal{E} \models (Aus)$.

Beweis: Nach Lemma 3.5 gilt für alle $\alpha \in On$, dass

$$\llbracket \forall_{\alpha+1} x \exists_{\alpha+1} z \forall_{\alpha} y (y \in z) \Leftrightarrow (y \in x \wedge \varphi) \rrbracket_{\bar{\gamma}} = \mathbf{true}_{\bar{\gamma}}.$$

Nach Folgerung 3.15(i) erhalten wir dann

$$\llbracket \forall_{\alpha} y (y \in z) \Rightarrow (y \in x \wedge \varphi) \rrbracket_{\alpha+1, \alpha+1, \bar{\gamma}} = \llbracket \forall y (y \in z) \Rightarrow (y \in x \wedge \varphi) \rrbracket_{\alpha+1, \alpha+1, \bar{\gamma}}.$$

Ferner gilt nach Lemma 3.15(i),

$$\begin{aligned} \llbracket \forall_{\alpha} y (y \in x \wedge \varphi) \Rightarrow (y \in z) \rrbracket_{\alpha+1, \alpha+1, \bar{\gamma}} &= \llbracket \forall_{\alpha} y (y \in x \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (y \in z))) \rrbracket_{\alpha+1, \alpha+1, \bar{\gamma}} \\ &= \llbracket \forall y (y \in x \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (y \in z))) \rrbracket_{\alpha+1, \alpha+1, \bar{\gamma}}. \end{aligned}$$

Die Kombination dieser beiden Gleichungen ergibt dann

$$\llbracket \forall_{\alpha} y (y \in z) \Leftrightarrow (y \in x \wedge \varphi) \rrbracket_{\alpha+1, \alpha+1, \bar{\gamma}} = \llbracket \forall y (y \in z) \Leftrightarrow (y \in x \wedge \varphi) \rrbracket_{\alpha+1, \alpha+1, \bar{\gamma}}$$

und damit auch

$$\llbracket \exists_{\alpha+1} z \forall y (y \in z) \Leftrightarrow (y \in x \wedge \varphi) \rrbracket_{\alpha+1, \bar{\gamma}} = \mathbf{true}_{\alpha+1, \bar{\gamma}}.$$

Nach Definition der Interpretation unbeschränkter Existenzquantoren und da $\mathbf{true}_{\alpha+1, \bar{\gamma}}$ das Maximum der entsprechenden Heyting-Algebra ist, erhalten wir schließlich

$$\llbracket \exists z \forall y (y \in z) \Leftrightarrow (y \in x \wedge \varphi) \rrbracket_{\alpha+1, \bar{\gamma}} = \mathbf{true}_{\alpha+1, \bar{\gamma}}.$$

Damit gilt für alle $\alpha \in On$,

$$\llbracket \forall_{\alpha+1} x \exists z \forall y (y \in z) \Leftrightarrow (y \in x \wedge \varphi) \rrbracket_{\bar{\gamma}} = \mathbf{true}_{\bar{\gamma}}.$$

Nach Folgerung 3.13 gilt also $\mathcal{E} \models (Aus)$.

□

SATZ 3.30. $\mathcal{E} \models (\in -Ind)$.

Proof: Sei eine \in -Formel φ gegeben. Wir haben nun zu zeigen, dass

$$\llbracket (\forall x \forall y (y \in x \Rightarrow \varphi(y)) \Rightarrow \varphi(x)) \Rightarrow \forall x \varphi(x) \rrbracket = \mathbf{true}.$$

Angenommen wir hätten für alle $\alpha \in On$, dass

$$(6.1) \quad \llbracket (\forall x \forall y (y \in x \Rightarrow \varphi(y)) \Rightarrow \varphi(x)) \Rightarrow \forall_\alpha x \varphi(x) \rrbracket = \mathbf{true}.$$

Nach Lemma 3.18(i) wäre dieser Satz dann gezeigt. Wir werden nun mittels Ordinalzahlinduktion zeigen, dass die Gleichung (6.1) gilt.

Für $\alpha = 0$ gilt $\llbracket \varphi \rrbracket_0 = \mathbf{true}_0$, da es nur einen Morphismus von 0 nach Ω gibt. Damit ist nach Lemma 2.42 $\llbracket \forall_0 x \varphi(x) \rrbracket = \mathbf{true}$ und damit gilt auch die Gleichung (6.1) für dieses α . Sei nun $\alpha = \beta + 1$ und gelte $\llbracket (\forall x \forall y (y \in x \Rightarrow \varphi(y)) \Rightarrow \varphi(x)) \Rightarrow \forall_\beta x \varphi(x) \rrbracket = \mathbf{true}$. Damit gilt

$$\mathcal{E} \models (\forall x \forall y (y \in x \Rightarrow \varphi(y)) \Rightarrow \varphi(x)) \Rightarrow (\forall x \varphi_\beta(x) \Rightarrow \varphi(x)).$$

Ferner gilt nach Modus Ponens und Folgerung 3.14

$$\mathcal{E} \models ((\forall x \forall y (y \in x \Rightarrow \varphi(y)) \Rightarrow \varphi(x)) \wedge (\forall x \varphi_\beta(x) \Rightarrow \varphi(x))) \Rightarrow (\forall x \varphi_\alpha(x) \Rightarrow \varphi(x)).$$

Zusammen ergibt dies dann

$$\mathcal{E} \models (\forall x \forall y (y \in x \Rightarrow \varphi(y)) \Rightarrow \varphi(x)) \Rightarrow (\forall x \varphi_\alpha(x) \Rightarrow \varphi(x)).$$

Damit gilt also die Gleichung (6.1) auch für α .

Sei nun $\alpha \in On$ mit $\lim(\alpha)$ und die Gleichung (6.1) gelte für alle $\beta < \alpha$. Nach Lemma 3.22(i) erhalten wir dann auch, dass $\llbracket (\forall x \forall y (y \in x \Rightarrow \varphi(y)) \Rightarrow \varphi(x)) \Rightarrow \forall_\alpha x \varphi(x) \rrbracket = \mathbf{true}$ gilt. □

SATZ 3.31. $\mathcal{E} \models (Inf)$.

Beweis: Wir wollen also nun zeigen, dass folgende Gleichung gilt:

$$(6.2) \quad \mathcal{E} \models \exists z \exists y \ y \in z \wedge \forall x \ x \in z \Rightarrow \exists w \ w \in z \wedge x \in w.$$

Nach Lemma 3.4 gilt $\llbracket \exists_{\omega+1} z \forall_\omega x \ x \in z \rrbracket = \mathbf{true}$, also

$$\mathcal{E} \models \exists z \varphi_{\omega+1}(z) \wedge \forall x \varphi_\omega(x) \Rightarrow x \in z.$$

Nach Folgerung 3.14 gilt dann sogar

$$(6.3) \quad \mathcal{E} \models \exists z \varphi_{\omega+1}(z) \wedge \forall x \varphi_\omega(x) \Leftrightarrow x \in z.$$

Genauso erhalten wir dann $\llbracket \exists_{n+1} w \forall_n x \ x \in w \rrbracket = \mathbf{true}$, also insbesondere

$$\mathcal{E} \models \exists w \varphi_{n+1}(w) \wedge \forall x \varphi_n(x) \Rightarrow x \in w.$$

Damit gilt auch

$$\mathcal{E} \models \forall x \varphi_n(x) \Rightarrow (\exists w \varphi_{n+1}(w) \wedge x \in w).$$

Also gilt $\llbracket \forall_n x \exists_{n+1} w \ x \in w \rrbracket = \mathbf{true}$. Daraus folgt aus Folgerung 3.13(ii), dass $\llbracket \forall_n x \exists_\omega w \ x \in w \rrbracket = \mathbf{true}$. Nach Lemma 3.18(i) gilt dann auch $\llbracket \forall_\omega x \exists_\omega w \ x \in w \rrbracket = \mathbf{true}$, also

$$(6.4) \quad \mathcal{E} \models \forall x \varphi_\omega(x) \Rightarrow (\exists w \varphi_\omega(w) \wedge x \in w).$$

Aus den (6.3) und (6.4) folgt direkt gerade (6.2). □

SATZ 3.32. $\mathcal{E} \models (Ers)$.

Beweis: Sei eine $\in -$ Formel φ gegeben. Wir haben nun zu zeigen, dass

$$(6.5) \quad \mathcal{E} \models (\forall y \ y \in x \Rightarrow \exists w \varphi) \Rightarrow (\exists z \forall y \ y \in x \Rightarrow \exists w \ w \in z \wedge \varphi)$$

Sei $\alpha, \bar{\gamma}$ beliebig. Nach Folgerung 3.15(i) gilt nun folgende Einschränkung des Allquantors:

$$\llbracket \forall y \ y \in x \Rightarrow \exists w \varphi \rrbracket_{\alpha+1, \bar{\gamma}} = \llbracket \forall_{\alpha} y \ y \in x \Rightarrow \exists w \varphi \rrbracket_{\alpha+1, \bar{\gamma}}.$$

Nach Folgerung 3.13, gibt es nun ein $\beta \in On$, so dass $\llbracket \exists w \varphi \rrbracket_{\alpha+1, \alpha, \bar{\gamma}} = \llbracket \exists_{\beta} w \varphi \rrbracket_{\alpha+1, \alpha, \bar{\gamma}}$. Daraus ergibt sich also

$$\begin{aligned} \llbracket \forall y \ y \in x \Rightarrow \exists w \varphi \rrbracket_{\alpha+1, \bar{\gamma}} &= \llbracket \forall_{\alpha} y \ y \in x \Rightarrow \exists_{\beta} w \varphi \rrbracket_{\alpha+1, \bar{\gamma}} \\ &= \llbracket \forall y \ \varphi_{\alpha}(y) \Rightarrow y \in x \Rightarrow \exists w \ \varphi_{\beta}(w) \wedge \varphi \rrbracket_{\alpha+1, \bar{\gamma}} \end{aligned}$$

Nach Lemma 3.4 gilt $\llbracket \exists_{\beta+1} z \forall_{\beta} w \ w \in z \rrbracket = \mathbf{true}$. Nach Definition der Interpretation unbeschränkter Quantoren und Folgerung 3.15(i) erhalten wir dann $\llbracket \exists z \forall w \ \varphi_{\beta}(w) \Rightarrow w \in z \rrbracket = \mathbf{true}$. Also gilt $\mathcal{E} \models \exists z \forall w \ \varphi_{\beta}(w) \Rightarrow w \in z$. Es gilt also

$$\mathcal{E} \models (\forall y \ y \in x \Rightarrow \exists w \ \varphi) \Rightarrow (\exists z (\forall w \ \varphi_{\beta}(w) \Rightarrow w \in z) \wedge (\forall y \ \varphi_{\alpha}(y) \Rightarrow y \in x \Rightarrow \exists w \ \varphi_{\beta}(w) \wedge \varphi)).$$

Nach den Regeln der prädikativen Logik erhalten wir

$$\mathcal{E} \models (\forall y \ y \in x \Rightarrow \exists w \ \varphi) \Rightarrow (\exists z \forall y \ \varphi_{\alpha}(y) \Rightarrow y \in x \Rightarrow (\exists w \ \varphi_{\beta}(w) \wedge \varphi \wedge (\varphi_{\beta}(w) \Rightarrow w \in z))).$$

Nach Modus Ponens gilt dann

$$\mathcal{E} \models (\forall y \ y \in x \Rightarrow \exists w \ \varphi) \Rightarrow (\exists z \forall y \ \varphi_{\alpha}(y) \Rightarrow y \in x \Rightarrow (\exists w \ \varphi \wedge x \in z)).$$

Dann gilt insbesondere

$$\begin{aligned} \mathbf{true}_{\alpha+1, \bar{\gamma}} &= \llbracket (\forall y \ y \in x \Rightarrow \exists w \ \varphi) \Rightarrow (\exists z \forall y \ \varphi_{\alpha}(y) \Rightarrow y \in x \Rightarrow \exists w \ \varphi \wedge x \in z) \rrbracket_{\alpha+1, \bar{\gamma}} \\ &= \llbracket (\forall y \ y \in x \Rightarrow \exists w \ \varphi) \Rightarrow (\exists z \forall y \ y \in x \Rightarrow \exists w \ \varphi \wedge x \in z) \rrbracket_{\alpha+1, \bar{\gamma}} \end{aligned}$$

Da α beliebig gewählt war, gilt (6.5). □

THEOREM 3.33. $\mathcal{E} \models IZF$.

7. Der $(-, -)$ -Morphismus

Angenommen, wir haben für ein $\alpha \in On$ ein Unterobjekt $m : A \hookrightarrow V_{\alpha}$. Nach Folgerung 2.52 gibt es dann auch einen Monomorphismus $\exists_m : \Omega^A \hookrightarrow V_{\alpha+1}$. Liegt also ein Objekt in der Hierarchie, dann liegt auch sein Potenzobjekt in der Hierarchie. Aber wie sieht es mit Produkten aus? In diesem Abschnitt werden wir zur Bewortung dieser Frage einen Monomorphismus $(-, -) : V_{\alpha} \times V_{\alpha} \hookrightarrow V_{\alpha+2}$ konstruieren.

Sei erstmal A ein beliebiges Objekt in \mathcal{E} . Wir beginnen mit der Konstruktion eines Monomorphismus $\{-\} : A \hookrightarrow \Omega^A$. Diesen Morphismus definieren wir als Transponierte von $=_{A \times A} : A \times A \rightarrow \Omega$.

SATZ 3.34. $\{-\} : A \rightarrow \Omega^A$ ist ein Monomorphismus.

Beweis: Seien zwei Morphismen $f, g : D \rightarrow A$ mit $\{-\} \circ f = \{-\} \circ g$ gegeben. Nach Lemma 2.31 gilt dann $=_{\Omega^A} \circ (\{-\} \circ f, \{-\} \circ g) = \mathbf{true}_D$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathbf{true}_D &=_{\Omega^A} \circ (\{-\} \times \{-\}) \circ (f, g) \\
&= \llbracket \forall_A x_3 \ x_3 \in x_1 \Leftrightarrow x_3 \in x_2 \rrbracket_{\Omega^A, \Omega^A} \circ (\{-\} \times \{-\}) \circ (f, g) && \text{nach Lemma 3.3} \\
&= \forall_A (\llbracket x_3 \in x_1 \Leftrightarrow x_3 \in x_2 \rrbracket_{\Omega^A, \Omega^A, A}) \circ (\{-\} \times \{-\}) \circ (f, g) \\
&= \forall_A (\llbracket x_3 \in x_1 \Leftrightarrow x_3 \in x_2 \rrbracket_{\Omega^A, \Omega^A, A} (\{-\} \times \{-\})) \times Id \circ (f, g) && \text{nach Lemma 2.43} \\
&= \forall_A (\llbracket x_3 = x_1 \Leftrightarrow x_3 = x_2 \rrbracket_{A, A, A}) \circ (f, g) && \text{nach Definition von } \{-\} \\
&= \forall_A (\llbracket x_3 = x_1 \Leftrightarrow x_3 = x_2 \rrbracket_{A, A, A} ((f, g) \times Id)) && \text{nach Lemma 2.43.}
\end{aligned}$$

Dann gilt nach Lemma 2.42, dass

$$\llbracket x_3 = x_1 \Leftrightarrow x_3 = x_2 \rrbracket_{A, A, A} \circ ((f, g) \times Id) = \mathbf{true}_{D \times A}.$$

Damit erhalten wir nach Lemma 2.31

$$\begin{aligned}
\mathbf{true}_D &= \mathbf{true}_{D \times A} \circ (Id, f) \\
&= \llbracket x_3 = x_1 \Leftrightarrow x_3 = x_2 \rrbracket_{A, A, A} \circ ((f, g) \times f) \\
&= =_{\Omega} \circ (=_A \circ (f, f), =_A \circ (g, f)) \\
&= =_{\Omega} \circ (\mathbf{true}_D, =_A \circ (g, f)).
\end{aligned}$$

Wieder nach Lemma 2.31 gilt dann, $\mathbf{true}_D = =_A \circ (g, f)$ und $f = g$. Damit ist $\{-\}$ ein Monomorphismus. \square

Ferner betrachten wir nun einen Morphismus $\{-, -\} : A \times A \rightarrow \Omega^A$. Wir definieren ihn als Transponierte von $\llbracket x_1 = x_2 \vee x_1 = x_3 \rrbracket_{A, A, A} : A \times A \times A \rightarrow \Omega$.

LEMMA 3.35. Falls $\{-\} \circ g = \{-, -\} \circ (f_1, f_2)$, dann gilt $g = f_1 = f_2$.

Beweis: Wie im vorherigen Satz erhalten wir nach Lemma 3.3, Lemma 2.43 und den Definitionen von $\{-\}$ und $\{-, -\}$, dass

$$\begin{aligned}
&=_{\Omega^A} \circ (\{-\} \circ g, \{-, -\} \circ (f_1, f_2)) \\
&= \llbracket \forall_A x_3 \ x_3 \in x_1 \Leftrightarrow x_3 \in x_2 \rrbracket_{\Omega^A, \Omega^A} \circ (\{-\} \circ g \times, \{-, -\} \circ (f_1, f_2)) \\
&= \forall_A (\llbracket x_3 \in x_1 \Leftrightarrow x_3 \in x_2 \rrbracket_{\Omega^A, \Omega^A, A}) \circ ((\{-\} \circ g, \{-, -\} \circ (f_1, f_2)) \times Id) \\
&= \forall_A (\llbracket x_4 = x_1 \Leftrightarrow (x_2 = x_4 \vee x_3 = x_4) \rrbracket_{A, A, A, A}) \circ ((g, f_1, f_2) \times Id).
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung und Lemma 2.31 gilt aber dann, dass $=_{\Omega^A} \circ (\{-\} \circ g, \{-, -\} \circ (f_1, f_2)) = \mathbf{true}_D$. Nach der obigen Gleichung und Lemma 2.42 gilt damit auch $\llbracket x_4 = x_1 \Leftrightarrow (x_2 = x_4 \vee x_3 = x_4) \rrbracket_{A, A, A, A} \circ ((g, f_1, f_2) \times Id) = \mathbf{true}_{D \times A}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathbf{true}_D &= \mathbf{true}_{D \times A} \circ (Id, f_1) \\
&= \llbracket x_4 = x_1 \Leftrightarrow (x_2 = x_4 \vee x_3 = x_4) \rrbracket_{A, A, A, A} \circ (g, f_1, f_2, f_1) \\
&= =_{\Omega} \circ (=_A \circ (g, f_1), \vee \circ (=_A \circ (f_1, f_1), =_A \circ (f_1, f_2))) \\
&= =_{\Omega} \circ (=_A \circ (g, f_1), \vee \circ (\mathbf{true}_D, =_A \circ (f_1, f_2))) \\
&= =_{\Omega} \circ (=_A \circ (g, f_1), \mathbf{true}_D).
\end{aligned}$$

Also erhalten wir nach Lemma 2.31, dass $=_A \circ (g, f_1) = \mathbf{true}_D$ und damit $g = f_1$. Mit dem gleichen Argument erhalten wir auch $g = f_2$.

□

LEMMA 3.36. Falls $\{-, -\} \circ (f_1, f_2) = \{-, -\} \circ (g_1, g_2)$, dann gilt

$$\llbracket x_1 = x_2 \vee x_1 = x_3 \rrbracket_{A,A,A} \circ (f_1, g_1, g_2) = \mathbf{true}_D.$$

Beweis: Wie inzwischen üblich erhalten wir nach Lemma 3.3, Lemma 2.43 und der Definition von $\{-, -\}$, dass

$$\begin{aligned} &=_{\Omega^A} \circ (\{-, -\} \circ (f_1, f_2), \{-, -\} \circ (g_1, g_2)) \\ &= \llbracket \forall_A x_3 \ x_3 \in x_1 \Leftrightarrow x_3 \in x_2 \rrbracket_{\Omega^A, \Omega^A} \circ (\{-, -\} \circ (f_1, f_2), \{-, -\} \circ (g_1, g_2)) \\ &= \forall_A (\llbracket x_3 \in x_1 \Leftrightarrow x_3 \in x_2 \rrbracket_{\Omega^A, \Omega^A, A} \circ ((\{-, -\} \circ (f_1, f_2), \{-, -\} \circ (g_1, g_2)) \times Id)) \\ &= \forall_A (\llbracket (x_1 = x_5 \vee x_2 = x_5) \Leftrightarrow (x_3 = x_5 \vee x_4 = x_5) \rrbracket_{A,A,A,A,A} \circ ((f_1, f_2, g_1, g_2) \times Id)). \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung und Lemma 2.31 gilt aber dann, dass $=_{\Omega^A} \circ (\{-, -\} \circ (f_1, f_2), \{-, -\} \circ (g_1, g_2)) = \mathbf{true}_D$. Nach der obigen Gleichung und Lemma 2.42 gilt damit auch $\llbracket (x_1 = x_5 \vee x_2 = x_5) \Leftrightarrow (x_3 = x_5 \vee x_4 = x_5) \rrbracket_{A,A,A,A,A} \circ ((f_1, f_2, g_1, g_2) \times Id) = \mathbf{true}_{D \times A}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{true}_D &= \mathbf{true}_{D \times A} \circ (Id, f_1) \\ &= \llbracket (x_1 = x_5 \vee x_2 = x_5) \Leftrightarrow (x_3 = x_5 \vee x_4 = x_5) \rrbracket_{A,A,A,A,A} \circ (f_1, f_2, g_1, g_2, f_1) \\ &= =_{\Omega} \circ (\mathbf{true}_D, \vee \circ (=_A \circ (g_1, f_1), =_A \circ (g_2, f_1)), \mathbf{true}_D). \end{aligned}$$

Nach Lemma 2.31 gilt dann $\mathbf{true}_D = \vee \circ (=_A \circ (g_1, f_1), =_A \circ (g_2, f_1))$. Damit ist das Lemma bewiesen. □

Natürlich erhält man genauso wie in diesem Lemma, dass bei den gleichen Voraussetzung auch $\llbracket x_1 = x_2 \vee x_1 = x_3 \rrbracket_{A,A,A} \circ (f_2, g_1, g_2) = \mathbf{true}_D$ und $\llbracket x_1 = x_2 \vee x_1 = x_3 \rrbracket_{A,A,A} \circ (g_2, f_1, f_2) = \mathbf{true}_D$. Was passiert nun, wenn im Fall von diesem Lemma zusätzlich $f_1 = g_1$ gilt? Wir erhalten dann aus der letzten Gleichung, dass ebenfalls $\llbracket x_1 = x_2 \vee x_1 = x_3 \rrbracket_{A,A,A} \circ (g_2, g_1, f_2) = \mathbf{true}_D$. Insgesamt ergibt sich also

$$\llbracket (x_1 = x_2 \vee x_1 = x_3) \wedge (x_3 = x_2 \vee x_3 = x_1) \rrbracket_{A,A,A} \circ (f_2, g_1, g_2) = \mathbf{true}_D.$$

Dann gilt nach De Morgan

$$\llbracket x_1 = x_3 \vee (x_3 = x_2 \wedge x_2 = x_1) \rrbracket_{A,A,A} \circ (f_2, g_1, g_2) = \mathbf{true}_D$$

und damit nach Lemma 2.31 gilt $f_2 = g_2$. Wir erhalten also die Folgerung:

FOLGERUNG 3.37. Falls $\{-, -\} \circ (f_1, f_2) = \{-, -\} \circ (f_1, g)$, dann gilt $f_2 = g$.

Definieren nun schließlich unseren gesuchten Morphismus: Der Geordnetes-Paar-Morphismus $(-, -)$ sei definiert als

$$A \times A \xrightarrow{(\{-\} \circ \pi_1, \{-, -\})} \Omega^A \times \Omega^A \xrightarrow{\{-, -\}} \Omega^{\Omega^A}.$$

Die vorrangegangenen Lemmata und die letzte Folgerung ermöglichen uns nun den Beweis, dass dieser Morphismus ein Monomorphismus ist.

SATZ 3.38. $(-, -)$ ist ein Monomorphismus.

Beweis: Seien $f = (f_1, f_2) : D \rightarrow A \times A$ und $g = (g_1, g_2) : D \rightarrow A \times A$ zwei Morphismen mit $(-, -) \circ (f_1, f_2) = (-, -) \circ (g_1, g_2)$. Dann gilt nach Lemma 3.36

$$\vee \circ (=_{\Omega^A} \circ (\{-\} \circ f_1, \{-\} \circ g_1), =_{\Omega^A} \circ (\{-\} \circ f_1, \{-, -\} \circ (g_1, g_2))) = \mathbf{true}_D.$$

Da $\{-\}$ nach Satz 3.34 ein Monomorphismus ist, gilt $=_{\Omega^A} \circ (\{-\} \circ f_1, \{-\} \circ g_1) \leq_A \circ (f_1, g_1)$. Ferner nach Lemma 3.35 gilt auch $=_{\Omega^A} \circ (\{-\} \circ f_1, \{-, -\} \circ (g_1, g_2)) \leq_A \circ (f_1, g_1)$.

Also gilt $\vee \circ (=_{\Omega^A} \circ (f_1, g_1), =_{\Omega^A} \circ (f_1, g_1)) = \mathbf{true}_D$ und so nach Lemma 2.31 auch $f_1 = g_1$. Damit gilt nach Annahme und Definition von $(-, -)$, dass

$$\{-, -\} \circ (\{-\} \circ f_1, \{-, -\} \circ (f_1, f_2)) = \{-, -\} \circ (\{-\} \circ f_1, \{-, -\} \circ (f_1, g_2)).$$

Nach Folgerung 3.37 gilt dann $\{-, -\} \circ (f_1, f_2) = \{-, -\} \circ (f_1, g_2)$. Wiederum nach dieser Folgerung gilt dann auch $f_2 = g_2$. Damit ist $f = g$ und $(-, -)$ ist tatsächlich ein Monomorphismus. \square

Betrachten wir nun unsere von-Neumann-Hierarchie. Wir haben im vorherigen Satz gezeigt, dass es für jedes $\alpha \in On$ einen Monomorphismus $(-, -) : V_\alpha \times V_\alpha \hookrightarrow V_{\alpha+2}$ gibt. Dieser Monomorphismus spielt im nächsten Kapitel eine große Rolle. Wir werden daher noch zwei wichtige Eigenschaften dieses Monomorphismus zeigen. Zum einen werden wir beweisen, dass er sich mit dem Monomorphismus i_β^α wohl verträgt, und zum zweiten werden wir zeigen, dass er tatsächlich durch die mengentheoretische Formel $x_3 = (x_1, x_2)$ als Unterobjekt von $V_{\alpha+2}$ charakterisiert ist.

LEMMA 3.39. Seien $\alpha, \beta \in On$ und $\beta \leq \alpha$, dann gilt

- (i) $\{-\} \circ i_\beta^\alpha = i_{\beta+1}^{\alpha+1} \circ \{-\}$,
- (ii) $\{-, -\} \circ (i_\beta^\alpha \times i_\beta^\alpha) = i_{\beta+1}^{\alpha+1} \circ \{-, -\}$.

Beweis: (i) Da $\{-\} : V_\alpha \times V_\alpha \rightarrow V_{\alpha+1}$ die Transponierte von $\llbracket x_1 = x_2 \rrbracket_{\alpha, \alpha}$, ist nach der Natürlichkeit der Transponierte $\{-\} \circ i_\beta^\alpha$ gerade die Transponierte von $\llbracket x_1 = x_2 \rrbracket_{\beta, \alpha} \circ (Id \times i_\beta^\alpha)$.

(2) Das folgende Diagramm ist ein Pullback-Quadrat:

$$\begin{array}{ccc} V_\beta & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ \downarrow (Id, Id) & & \downarrow \mathbf{true} \\ V_\beta \times V_\beta & & \\ \downarrow i_\beta^\alpha \times Id & & \downarrow \\ V_\alpha \times V_\beta & \xrightarrow{\llbracket x_1 = x_2 \rrbracket_{\alpha, \alpha} \circ (Id \times i_\beta^\alpha)} & \Omega \end{array}$$

Beweis: Offensichtlich kommutiert das obige Diagramm nach Lemma 3.7. Sei nun $f = (f_1, f_2) : D \rightarrow V_\alpha \times V_\beta$ ein Morphismus mit $\llbracket x_1 = x_2 \rrbracket_{\alpha, \alpha} \circ (Id \times i_\beta^\alpha) \circ f = \mathbf{true}_D$. Dann gilt $f_1 = i_\beta^\alpha \circ f_2$. Damit ist f_2 der gesuchte Morphismus und das obige Diagramm ein Pullback-Quadrat. $\square(2)$

Also ist $(i_\beta^\alpha \times Id) \circ (Id, Id)$ das zu $\llbracket x_1 = x_2 \rrbracket_{\alpha, \alpha} \circ (Id \times i_\beta^\alpha)$ gehörige Unterobjekt. Nach Lemma 2.54 ist dann $\exists_{i_\beta^\alpha} \circ \{-\}$ die Transponierte von $\llbracket x_1 = x_2 \rrbracket_{\alpha, \alpha} \circ (Id \times i_\beta^\alpha)$. Da nach Definition der von-Neumann-Hierarchie $\exists_{i_\beta^\alpha} = i_{\beta+1}^{\alpha+1}$ gilt, ergibt sich so die Behauptung.

(ii) Da $\{-, -\} : V_\alpha \times V_\alpha \rightarrow V_{\alpha+1}$ die Transponierte von $\llbracket x_1 = x_2 \vee x_1 = x_3 \rrbracket_{\alpha, \alpha, \alpha}$, ist nach der Natürlichkeit der Transponierte $\{-, -\} \circ (i_\beta^\alpha \times i_\beta^\alpha)$ gerade die Transponierte

von $\llbracket x_1 = x_2 \vee x_1 = x_3 \rrbracket_{\alpha, \alpha, \alpha} \circ (Id \times i_\beta^\alpha \times i_\beta^\alpha)$. Sei nun $l : L \hookrightarrow V_\beta \times V_\beta \times V_\beta$ das zu $\llbracket x_1 = x_2 \vee x_1 = x_3 \rrbracket_{\beta, \beta, \beta}$ gehörige Unterobjekt.

(3) Das folgende Diagramm ist ein Pullback-Quadrat:

$$\begin{array}{ccc}
 L & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & 1 \\
 \downarrow l & & \downarrow \mathbf{true} \\
 V_\beta \times V_\beta \times V_\beta & & \\
 \downarrow i_\beta^\alpha \times Id \times Id & & \\
 V_\alpha \times V_\beta \times V_\beta & \xrightarrow{\llbracket x_1 = x_2 \vee x_1 = x_3 \rrbracket_{\alpha, \alpha, \alpha} \circ (Id \times i_\beta^\alpha \times i_\beta^\alpha)} & \Omega
 \end{array}$$

Beweis: Nach Lemma 3.7 und Definition von l ist diese Diagramm offensichtlich kommutativ. Sei nun ein Morphismus $f = (f_1, f_2, f_3) : D \rightarrow V_\alpha \times V_\beta \times V_\beta$ gegeben mit $\llbracket x_1 = x_2 \vee x_1 = x_3 \rrbracket_{\alpha, \alpha, \alpha} \circ (Id \times i_\beta^\alpha \times i_\beta^\alpha) \circ f = \mathbf{true}_D$. Dann gilt offensichtlich auch

$$\llbracket (x_1 = x_2 \wedge \varphi_\beta(x_2)) \vee (x_1 = x_3 \wedge \varphi_\beta(x_3)) \rrbracket_{\alpha, \alpha, \alpha} \circ (Id \times i_\beta^\alpha \times i_\beta^\alpha) \circ f = \mathbf{true}_D.$$

Da $\llbracket x_1 = x_2 \wedge \varphi_\beta(x_2) \rrbracket_{\alpha, \alpha} \leq \llbracket \varphi_\beta(x_1) \rrbracket_{\alpha, \alpha}$, gilt dann

$$\llbracket \varphi_\beta(x_1) \rrbracket_{\alpha, \alpha, \alpha} \circ (Id \times i_{\beta+1}^\alpha \times i_\beta^\alpha) \circ f = \mathbf{true}_D.$$

Es gibt also einen Morphismus $g : D \rightarrow V_\beta$ mit $i_\beta^\alpha \circ g = f_1$. Damit gilt also

$$\llbracket (x_1 = x_2) \vee (x_1 = x_3) \rrbracket_{\beta, \beta, \beta} \circ (g, f_2, f_3) = \mathbf{true}_D.$$

Also gibt es einen Morphismus $h : D \rightarrow L$ mit $l \circ h = (g, f_2, f_3)$ und damit mit $(i_\beta^\alpha \times Id \times Id) \circ l \circ h = (f_1, f_2, f_3)$. Damit ist das obige Diagramm ein Pullback-Quadrat.

□(2)

Also ist $(i_\beta^\alpha \times Id \times Id) \circ l$ das zu $\llbracket x_1 = x_2 \vee x_1 = x_3 \rrbracket_{\alpha, \alpha, \alpha} \circ (Id \times i_\beta^\alpha \times i_\beta^\alpha)$ gehörige Unterobjekt. Nach Lemma 2.54 ist dann dessen Transponierte gerade $\exists_{i_\beta^\alpha} \circ \{-, -\}$. Nach Konstruktion der von-Neumann-Hierarchie gilt $i_{\beta+1}^{\alpha+1} = \exists_{i_\beta^\alpha}$ und so ergibt sich die Behauptung.

□

FOLGERUNG 3.40. Seien $\alpha, \beta \in On$ und $\beta \leq \alpha$, dann gilt

$$(-, -) \circ (i_\beta^\alpha \times i_\beta^\alpha) = i_{\beta+2}^{\alpha+2} \circ (-, -).$$

Beweis: Dies folgt nun schnell aus dem vorherigen Lemma und der Definition von $(-, -)$:

$$\begin{aligned}
 i_{\beta+2}^{\alpha+2} \circ (-, -) &= \{-, -\} \circ (i_{\beta+1}^{\alpha+1} \times i_{\beta+1}^{\alpha+1}) \circ (\{-\} \circ \pi_1, \{-, -\}) \\
 &= \{-, -\} \circ (i_{\beta+1}^{\alpha+1} \{-\} \circ \pi_1, i_{\beta+1}^{\alpha+1} \{-, -\}) \\
 &= \{-, -\} \circ (\{-\} \circ i_\beta^\alpha \circ \pi_1, \{-, -\} \circ (i_\beta^\alpha \times i_\beta^\alpha)) \\
 &= \{-, -\} \circ (\{-\} \circ \pi_1, \{-, -\}) \circ (i_\beta^\alpha \times i_\beta^\alpha) \\
 &= (-, -) \circ (i_\beta^\alpha \times i_\beta^\alpha).
 \end{aligned}$$

□

LEMMA 3.41. Der charakteristische Morphismus von $\{-\} : V_\alpha \hookrightarrow V_{\alpha+1}$ ist $\llbracket \exists_\alpha x_2 x_3 = \{x_2\} \rrbracket$.

Beweis: Nach mengentheoretischen Definition ist $x_2 = \{x_1\}$ gerade $\forall x_1(x_1 \in x_3 \Leftrightarrow x_1 = x_2)$. Nach Folgerung 3.15(i) und Folgerung 3.21 gilt dann

$$\llbracket \forall x_1(x_1 \in x_3 \Leftrightarrow x_1 = x_2) \rrbracket_{\alpha, \alpha+1} = \llbracket \forall_\alpha x_1(x_1 \in x_3 \Leftrightarrow x_1 = x_2) \rrbracket_{\alpha, \alpha+1}.$$

(4) Das folgende Diagramm ist ein Pullback-Quadrat

$$\begin{array}{ccc} V_\alpha & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow (Id, \{-\}) & & \downarrow \mathbf{true} \\ V_\alpha \times V_{\alpha+1} & \xrightarrow{\llbracket \forall_\alpha x_1(x_1 \in x_3 \Leftrightarrow x_1 = x_2) \rrbracket_{\alpha, \alpha+1}} & \Omega \end{array}$$

Beweis: Nach Lemma 2.43, Lemma 2.49 und der Definition des Morphismus $\{-\}$ gilt

$$\begin{aligned} & \llbracket \forall_\alpha x_1(x_1 \in x_3 \Leftrightarrow x_1 = x_2) \rrbracket_{\alpha, \alpha+1} \circ (Id, \{-\}) \\ &= \forall_\alpha(\llbracket x_1 \in x_3 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \rrbracket_{\alpha, \alpha, \alpha+1} \circ (Id \times (Id, \{-\}))) \\ &= \forall_\alpha(=_{\Omega} \circ (ev_\alpha \circ (Id \times \{-\})), =_{\alpha}) \\ &= \mathbf{true}_\alpha. \end{aligned}$$

Damit kommutiert das obige Diagramm. Sei nun ein Morphismus $f = (f_1, f_2) : D \rightarrow V_\alpha \times V_{\alpha+1}$ mit $\llbracket \forall_\alpha x_1(x_1 \in x_3 \Leftrightarrow x_1 = x_2) \rrbracket_{\alpha, \alpha+1} \circ f = \mathbf{true}_D$ gegeben. Dann gilt nach Lemma 2.43 und Lemma 2.42

$$\begin{aligned} \mathbf{true}_{V_\alpha \times D} &= \llbracket (x_1 \in x_3 \Leftrightarrow x_1 = x_2) \rrbracket_{\alpha, \alpha, \alpha+1} \circ (Id \times f) \\ &= =_{\Omega} \circ (ev_\alpha \circ (Id \times f_2)), =_A \circ (Id \times f_1) \end{aligned}$$

Also gilt nach Lemma 2.31, dass $ev_\alpha \circ (Id \times f_2) = =_A \circ (Id \times f_1)$. Damit ist f_2 die Transponierte von $=_A \circ (Id \times f_1)$. Nach Natürlichkeit der Transponierten und Definition des Morphismus $\{-\}$ ist aber $\{-\} \circ f_1$ ebenfalls die Transponierte von $=_A \circ (Id \times f_1)$. Damit gilt also $\{-\} \circ f_1 = f_2$. Demnach gilt ebenfalls

$$(Id, \{-\}) \circ f_1 = (f_1, f_2).$$

Damit ist das obige Diagramm ein Pullback-Quadrat.

□(4)

Nach (4) ist nun $\llbracket \exists_\alpha x_2 x_3 = \{x_2\} \rrbracket$ der charakteristische Morphismus des Bildes von $\{-\}$, also $\{-\}$ selber.

□

LEMMA 3.42. Der charakteristische Morphismus von $\{-, -\} : V_\alpha \times V_\alpha \hookrightarrow V_{\alpha+1}$ ist $\llbracket \exists_\alpha x_2 \exists_\alpha x_3 x_4 = \{x_2, x_3\} \rrbracket$.

Beweis: Der Beweis verläuft wie im Fall von $\{-\}$. Nach der mengentheoretischen Definition ist $x_4 = \{x_2, x_3\}$ gerade $\forall x_1(x_1 \in x_4 \Leftrightarrow (x_1 = x_2 \vee x_1 = x_3))$. Nach Folgerung 3.15(i) und Folgerung 3.21 gilt dann

$$\llbracket \forall x_1(x_1 \in x_4 \Leftrightarrow (x_1 = x_2 \vee x_1 = x_3)) \rrbracket_{\alpha, \alpha+1} = \llbracket \forall_\alpha x_1(x_1 \in x_4 \Leftrightarrow (x_1 = x_2 \vee x_1 = x_3)) \rrbracket_{\alpha, \alpha+1}.$$

(5) Das folgende Diagramm ist ein Pullback-Quadrat

$$\begin{array}{ccc} V_\alpha \times V_\alpha & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow (Id \times Id, \{-, -\}) & & \downarrow \mathbf{true} \\ V_\alpha \times V_\alpha \times V_{\alpha+1} & \xrightarrow{\llbracket \forall_\alpha x_1(x_1 \in x_4 \Leftrightarrow (x_1 = x_2 \vee x_1 = x_3)) \rrbracket_{\alpha, \alpha, \alpha+1}} & \Omega \end{array}$$

Beweis: Nach Lemma 2.43, Lemma 2.49 und der Definition des Morphismus $\{-, -\}$ gilt

$$\begin{aligned} & \llbracket \forall_\alpha x_1 (x_1 \in x_4 \Leftrightarrow (x_1 = x_2 \vee x_1 = x_3)) \rrbracket_{\alpha, \alpha, \alpha+1} \circ (Id \times Id, \{-, -\}) \\ &= \forall_\alpha (\llbracket x_1 \in x_4 \Leftrightarrow (x_1 = x_2 \vee x_1 = x_3) \rrbracket_{\alpha, \alpha, \alpha+1, \alpha} \circ ((Id \times Id, \{-, -\}) \times Id)) \\ &= \forall_\alpha (=_{\Omega} \circ (ev_\alpha \circ (Id \times \{-, -\})), \llbracket (x_1 = x_2 \vee x_1 = x_3) \rrbracket_{\alpha, \alpha, \alpha}) \\ &= \mathbf{true}_\alpha. \end{aligned}$$

Damit kommutiert das obige Diagramm. Sei nun ein Morphismus $f = (f_1, f_2, f_3) : D \rightarrow V_\alpha \times V_\alpha \times V_{\alpha+1}$ mit $\llbracket \forall_\alpha x_1 (x_1 \in x_4 \Leftrightarrow (x_1 = x_2 \vee x_1 = x_3)) \rrbracket_{\alpha, \alpha, \alpha+1} \circ f = \mathbf{true}_D$ gegeben. Dann gilt nach Lemma 2.43 und Lemma 2.42

$$\begin{aligned} \mathbf{true}_{V_\alpha \times D} &= \llbracket x_1 \in x_4 \Leftrightarrow (x_1 = x_2 \vee x_1 = x_3) \rrbracket_{\alpha, \alpha, \alpha+1, \alpha} \circ (Id \times f) \\ &=_{\Omega} (ev_\alpha \circ (Id \times f_3), \llbracket (x_1 = x_2 \vee x_1 = x_3) \rrbracket_{\alpha, \alpha, \alpha} \circ (Id \times (f_1, f_2))). \end{aligned}$$

Nach Lemma 2.31 gilt dann also $ev_\alpha \circ (Id \times f_3) = \llbracket (x_1 = x_2 \vee x_1 = x_3) \rrbracket_{\alpha, \alpha, \alpha} \circ (Id \times (f_1, f_2))$. Damit ist f_3 die Transponierte von $\llbracket (x_1 = x_2 \vee x_1 = x_3) \rrbracket_{\alpha, \alpha, \alpha} \circ (Id \times (f_1, f_2))$. Nach Definition von $\{-, -\}$ und der Natürlichkeit der Transponierten gilt dann $f_3 = \{-, -\} \circ (f_1, f_2)$. Damit gilt also insgesamt

$$(Id \times Id, \{-, -\}) \circ (f_1, f_2) = (f_1, f_2, f_3).$$

Damit ist das obige Diagramm ein Pullback-Quadrat.

□(5)

Nach (5) ist nun $\llbracket \exists_\alpha x_2 \exists_\alpha x_3 x_4 = \{x_2, x_3\} \rrbracket$ der charakteristische Morphismus des Bildes von $\{-, -\}$, also $\{-, -\}$ selber.

□

SATZ 3.43. Sei $\alpha \in On$, dann ist der charakteristische Morphismus von $(-, -) : V_\alpha \times V_\alpha \hookrightarrow V_{\alpha+2}$ gerade $\llbracket \exists_\alpha x_2 \exists_\alpha x_3 x_4 = (x_2, x_3) \rrbracket_{\alpha+2}$.

Beweis: Nach mengentheoretischen Definition ist $x_4 = (x_2, x_3)$ gerade $x_4 = \{\{x_2\}, \{x_2, x_3\}\}$. Offensichtlich ist nach (4) und (5) $\llbracket x_4 = \{x_2, x_3\} \wedge x_2 = \{x_0\} \wedge x_3 = \{x_0, x_1\} \rrbracket_{\alpha, \alpha, \alpha+1, \alpha+1, \alpha+2}$ der charakteristische Morphismus zu $(Id_{V_\alpha \times V_\alpha}, \{-\} \circ \pi_1, \{-, -\}, \{-, -\} \circ (\{-\} \circ \pi_1, \{-, -\})) : V_\alpha \times V_\alpha \hookrightarrow V_\alpha \times V_\alpha \times V_{\alpha+1} \times V_{\alpha+1} \times V_{\alpha+2}$. Demnach ist der charakteristische Morphismus von $\llbracket \exists_\alpha x_0 \exists_\alpha x_1 \exists_{\alpha+1} x_2 \exists_{\alpha+1} x_3 x_4 = \{x_2, x_3\} \wedge x_2 = \{x_0\} \wedge x_3 = \{x_0, x_1\} \rrbracket_{\alpha+2}$ gerade das Bild von $\{-, -\} \circ (\{-\} \circ \pi_1, \{-, -\})$. Dieser Morphismus ist nach Definition aber $(-, -)$ und ein Monomorphismus. Es bleibt zu zeigen, dass

$$\begin{aligned} & \llbracket \exists_\alpha x_0 \exists_\alpha x_1 \exists_{\alpha+1} x_2 \exists_{\alpha+1} x_3 x_4 = \{x_2, x_3\} \wedge x_2 = \{x_0\} \wedge x_3 = \{x_0, x_1\} \rrbracket_{\alpha+2} \\ &= \llbracket \exists x_0 \exists x_1 \exists_{\alpha+1} x_2 \exists_{\alpha+1} x_3 x_4 = \{x_2, x_3\} \wedge x_2 = \{x_0\} \wedge x_3 = \{x_0, x_1\} \rrbracket_{\alpha+2}. \end{aligned}$$

Da aber

$$\llbracket x_3 = \{x_0, x_1\} \wedge x_0 \in x_3 \wedge x_1 \in x_3 \rrbracket_{\alpha+1, \alpha, \alpha} = \llbracket x_3 = \{x_0, x_1\} \rrbracket_{\alpha+1, \alpha, \alpha}$$

gilt, folgt dies aus Folgerung 3.15(ii).

□

Innere Topoi

Dieses letzte Kapitel befasst sich nun mit dem möglichen Zusammenspiel von Topostheorie und der Theorie Innerer Modelle. Wir haben im vorherigen Kapitel gesehen, dass jeder vollständige, lokal kleine Topos ein ZF-Modell liefert und daher liegt die Frage nahe, ob man für jeden solcher Topoi auf kanonische Weise Untertopoi konstruieren kann. Insbesondere wäre sicherlich interessant, für jeden vollständigen, lokal kleinen Topos \mathcal{E} einen wiederum vollständigen, lokal kleinen Topos \mathbb{L} zu konstruieren, so dass dieser das Konstruktibilitätsaxiom erfüllt, maW. $\mathbb{L} \models V = L$.

Die Konstruktion in diesem Kapitel basiert auf sehr ähnlichen Ideen wie die Theorie der Inneren Modelle. In dem Fall der Inneren Modell haben wir eine Klasse gegeben, die transitiv, fast-universell und abgeschlossen bezüglich Σ_0 -Formel ist. Dagegen wird die Konstruktion unserer Untertopoi aufbauen auf einer Unterhierarchie der von-Neumann-Hierarchie, die ebenfalls Σ_0 -abgeschlossen. Wir werden noch zwei weitere Forderungen an diese Unterhierarchien stellen, die im Prinzip die Quasi-Universalität ersetzen, und es ermöglichen werden für jede solche Unterhierarchie eine Kategorie zu definieren und zu zeigen, dass diese Kategorie wiederum ein Topos ist. Für den Beweis dieser Tatsache ist das Zusammenspiel zwischen innere und äußere Logik entscheidend.

In Kapitel 5 werden wir betrachten, warum diese Konstruktion bei der Betrachtung unendliche Limiten nicht mehr funktioniert. Ferner werden wir überlegen, wann die Gültigkeit von Formeln zwischen dem Topos, mit dem wir starten, und dem Untertopos, den wir durch unsere Konstruktion erhalten, Σ_0 -absolut ist.

Wir beginnen das Kapitel nun mit der Definition einer Unterhierarchie. Sei \mathcal{E} ein Topos und für alle $\alpha \in On$ sei ein Unterobjekt $m_\alpha : M_\alpha \hookrightarrow V_\alpha$ gegeben.

DEFINITION 4.1. Wir nennen $(m_\alpha : M_\alpha \hookrightarrow V_\alpha)_{\alpha \in On}$ eine Unterhierarchie, falls

- (i) für alle $\alpha \in On$, $M_\alpha \xrightarrow{m_\alpha} V_\alpha \xrightarrow{i_\alpha^{\alpha+1}} V_{\alpha+1}$ durch $M_{\alpha+1} \xrightarrow{m_{\alpha+1}} V_{\alpha+1}$ faktorisiert.
- (ii) für alle $\alpha \in On$, $M_{\alpha+1} \xrightarrow{m_{\alpha+1}} V_{\alpha+1}$ durch $\Omega^{M_\alpha} \xrightarrow{\exists m_\alpha} \Omega^{V_\alpha}$ faktorisiert, und
- (iii) für alle $\lambda \in On$, $lim(\lambda)$, $lim_{\alpha < \lambda} M_\alpha = M_\lambda$.

Wir schreiben im folgenden auch oft $(M_\alpha)_{\alpha \in On}$ statt $(m_\alpha : M_\alpha \hookrightarrow V_\alpha)_{\alpha \in On}$, wenn klar ist, welche Einbettungen gemeint sind.

1. Unterobjekte der von-Neumann-Hierarchie

Die größte Unterhierarchie ist natürlich die von-Neumann-Hierarchie, also $(Id : V_\alpha \hookrightarrow V_\alpha)_\alpha$, selbst. In diesem Abschnitt wird die Kategorie $\mathcal{V}_{\mathcal{E}}$ der Unterobjekte dieser Hierarchie definiert werden. Wir werden später sehen, dass die Kategorie, die

wir für eine beliebige Unterhierarchie definieren wollen, eine nicht unbedingt volle Unterkategorie dieser Kategorie ist.

DEFINITION 4.2. Seien $i_A : A \hookrightarrow V_\alpha$ und $i_B : B \hookrightarrow V_\beta$ zwei Unterobjekte, wobei $\alpha \geq \beta$, dann gelte $i_A \sim i_B$, falls i_A und $i_\beta^\alpha \circ i_B$ dasselbe Unterobjekt von V_α repräsentieren.

Diese Definition sagt also folgendes aus: falls $i_A : A \hookrightarrow V_\alpha$ und $i_B : B \hookrightarrow V_\beta$ zwei Monomorphismen sind, dann gilt $i_A \sim i_B$, falls es einen Isomorphismus $\iota : A \rightarrow B$ gibt, so dass

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\iota} & B \\ & \searrow i_A & \downarrow i_\beta^\alpha \circ i_B \\ & & V_\alpha \end{array}$$

kommutiert. Dieser Isomorphismus ist eindeutig bestimmt, da $i_\beta^\alpha \circ i_B$ ein Monomorphismus ist. Wichtig zu beachten ist weiterhin, dass, wenn wir einen zweiten Monomorphismus $i_C : C \hookrightarrow V_\alpha$ gegeben haben, so dass i_A und i_C das gleiche Unterobjekt von V_α repräsentieren, dann gilt auch $i_C \sim i_A$.

LEMMA 4.3. Seien $i_A : A \hookrightarrow V_\alpha$ und $i_B : B \hookrightarrow V_\beta$ zwei Unterobjekte mit $i_A \sim i_B$, dann gilt

$$\llbracket x_1 = x_2 \rrbracket_{\alpha, \beta} \circ (i_A, i_B) = \mathbf{true}_{A, B}$$

Beweis: Nach Definition von $\llbracket x_1 = x_2 \rrbracket_{\alpha, \beta}$ ist dies der Morphismus $=_{V_\alpha} \circ (Id \times i_\beta^\alpha) : V_\alpha \times V_\beta \rightarrow \Omega$. Da aber i_A und $i_\beta^\alpha \circ i_B$ das gleiche Unterobjekt von V_α repräsentieren, gibt es einen Isomorphismus $\iota : B \rightarrow A$, so dass $i_A \circ \iota = i_\beta^\alpha \circ i_B$. Daher erhalten wir, dass

$$\begin{aligned} \llbracket x_1 = x_2 \rrbracket_{\alpha, \beta} \circ (i_A, i_B) &= =_{V_\alpha} \circ (Id \times i_\beta^\alpha) \circ (i_A, i_B) \\ &= =_{V_\alpha} \circ (i_A \times i_\beta^\alpha \circ i_B) \\ &= =_{V_\alpha} \circ (i_A \times i_A \circ \iota) \\ &= \mathbf{true}_{A, A} \circ (Id, \iota) \\ &= \mathbf{true}_{A, B}. \end{aligned}$$

□

FOLGERUNG 4.4. \sim ist eine Äquivalenzrelation.

Wir sagen nun, dass ein Äquivalenzklasse von \sim ein Unterobjekt der von-Neumann-Hierarchie ist. Die Objekte der Kategorie $V_\mathcal{E}$ seien nun genau diese Äquivalenzklassen. Es verbleibt nun noch, die Morphismen dieser Kategorie zu definieren.

Seien nun also vier Monomorphismen $i_A : A \hookrightarrow V_\alpha$, $i_B : B \hookrightarrow V_\beta$, $i_C : C \hookrightarrow V_\gamma$ und $i_D : D \hookrightarrow V_\delta$ gegeben mit $\alpha \geq \gamma$ und $\beta \geq \delta$. Weiterhin gelte, dass $i_A \sim i_C$ und dass $i_B \sim i_D$. Also erhalten wir zwei Isomorphismen $\iota_1 : C \rightarrow A$ und $\iota_2 : D \rightarrow B$, sodass $i_A \circ \iota_1 = i_\gamma^\alpha \circ i_C$ und $i_B \circ \iota_2 = i_\delta^\beta \circ i_D$ gilt. Seien nun $f : A \rightarrow B$ und $g : C \rightarrow D$ zwei Morphismen in \mathcal{E} , dann gelte $f \sim g$, falls

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{g} & D \\ \downarrow \iota_1 & & \downarrow \iota_2 \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

kommutiert. Dies ergibt offensichtlich ebenfalls eine Äquivalenzrelation.

Daher ist also ein Morphismus zwischen $(i_A : A \hookrightarrow V_\alpha)_\sim$ und $(i_B : B \hookrightarrow V_\beta)_\sim$ eine Äquivalenzklasse dieser Morphismen. Wir definieren die Komposition zweier solche Morphismen via eines Repräsentanten: Sei $(i_C : C \hookrightarrow V_\gamma)_\sim$ eine weitere Äquivalenzklasse und zwei zwei Morphismen $(f : A \rightarrow B)_\sim$ und $(g : B \rightarrow C)_\sim$ zwischen den obigen Äquivalenzklassen gegeben. Wir definieren $(g : B \rightarrow C)_\sim \circ (f : A \rightarrow B)_\sim$ als $(g \circ f : A \rightarrow C)_\sim$.

LEMMA 4.5. Die Komposition ist wohldefiniert.

Beweis: Seien also i_A, i_B, i_C und i_D, i_E, i_F entsprechende Monomorphismen mit $i_A \sim i_D, i_B \sim i_E$ und $i_C \sim i_F$. Weiterhin seien Morphismen $f_1 : A \rightarrow B, g_1 : B \rightarrow C, f_2 : D \rightarrow E$ und $g_2 : E \rightarrow F$ gegeben, so dass $f_1 \sim f_2$ und $g_1 \sim g_2$ gelte. Wir müssen also überprüfen, ob $g_1 \circ f_1 \sim g_2 \circ f_2$ gilt. Nach Voraussetzung kommutiert aber das linke und rechte Quadrat dieses Diagrammes:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f_1} & B & \xrightarrow{g_1} & C \\ \downarrow \iota_1 & & \downarrow \iota_2 & & \downarrow \iota_3 \\ D & \xrightarrow{f_2} & E & \xrightarrow{g_2} & F \end{array}$$

wobei $\iota_1 : A \rightarrow D, \iota_2 : B \rightarrow E$ und $\iota_3 : C \rightarrow F$ die entsprechenden Isomorphismen sind. Da die beiden Quadrate kommutieren, kommutiert auch das äußere Rechteck. Es gilt also $g_1 \circ f_1 \sim g_2 \circ f_2$.

□

Wir definieren also $V_{\mathcal{E}}$ als die Kategorie, die als Objekte Äquivalenzklassen von Unterobjekten hat und als Morphismen Äquivalenzklassen von Morphismen zwischen den Repräsentanten. Wie bisher üblich, wir werden beim Benutzen des Begriffes Unterobjekt oft nur eine Repräsentanten angeben und nicht die ganze Äquivalenzklasse. Objekte von $V_{\mathcal{E}}$ werden wir Unterobjekte der von-Neumann-Hierarchie nennen. Wie wir bereits gesehen haben gilt: Wenn zwei Monomorphismen das gleiche Unterobjekt eines $V_\alpha \in ob(\mathcal{E})$ repräsentieren, repräsentieren diese auch das gleiche Unterobjekt der von-Neumann-Hierarchie.

2. Bilder und Graph eines Morphismuses und deren Σ_0 -Formeln

Im vorherigen Abschnitt haben wir die Kategorie $V_{\mathcal{E}}$ definiert. Wie schon erwähnt wurde, streben wir eine Konstruktion von Unterkategorien dieser Kategorie an, die wieder Topoi sein sollen. Wir werden dafür insbesondere nicht volle Unterkategorien betrachten, also Kategorien, die nicht nur nicht alle Objekte von $V_{\mathcal{E}}$, sondern denen auch Morphismen zwischen den vorhandenen Objekten fehlen. Ein entscheidendes Kriterium wird sein, wie sich der Graph eines Morphismus verhält. In diesem Abschnitt werden wir daher den Graphen eines Morphismuses definieren und klären, durch welche Σ_0 -Formel dieser sich beschreiben lässt. Für zwei Unterobjekte $i_A : A \hookrightarrow V_\alpha$ und $i_B : B \hookrightarrow V_\alpha$ sei $(-, -)_{A,B} : A \times B \hookrightarrow V_{\alpha+2}$ das Unterobjekt $(-, -) \circ (i_A \times i_B)$.

DEFINITION 4.6. Seien $i_A : A \rightarrow V_\alpha$ und $i_B : B \rightarrow V_\alpha$ zwei Unterobjekte und $f : A \rightarrow B$ ein Morphismus, dann sei der Graph von f bezüglich i_A und i_B das Unterobjekt $(-, -)_{A,B} \circ (Id, f) : A \hookrightarrow V_{\alpha+2}$.

Wir bezeichnen dieses Unterobjekt oft mit dem entsprechenden Großbuchstaben, in diesem Fall F . Gelte nun für vier Unterobjekte $i_A : A \hookrightarrow V_\alpha, i_B : B \hookrightarrow V_\alpha, i_C : C \hookrightarrow V_\gamma$ und $i_D : D \hookrightarrow V_\gamma$, dass $i_A \sim i_C$ und $i_B \sim i_D$. Weiterhin seien zwei Morphismen $f : A \rightarrow B$ und $g : C \rightarrow D$ gegeben, so dass $f \sim g$. Dann gilt nach Folgerung 3.40

$$\begin{aligned}
(-, -)_{A,B} \circ (Id, f) &= (-, -) \circ (i_A \times i_B) \circ (Id, f) \\
&= (-, -) \circ (i_\gamma^\alpha \times i_\gamma^\alpha) \circ (i_C \times i_D) \circ (\iota_1 \times \iota_2) \circ (Id, f) \\
&= (-, -) \circ (i_\gamma^\alpha \times i_\gamma^\alpha) \circ (i_C \times i_D) \circ (\iota_1, g \circ \iota_1) \\
&= i_{\gamma+2}^{\alpha+2} \circ (-, -) \circ (i_C \times i_D) \circ (Id \times g) \circ \iota_1 \\
&= i_{\gamma+2}^{\alpha+2} \circ (-, -)_{C,D} \circ (Id \times g) \circ \iota_1,
\end{aligned}$$

wobei ι_1 der Isomorphismus zwischen A und C und ι_2 der Isomorphismus zwischen B und D ist. Es gilt also $F \sim G$. Wir können also für Unterobjekte der von-Neumann-Hierarchie und Morphismen zwischen ihnen eindeutig einen Graph definieren, in dem wir einfach den Graphen eines Repräsentanten wählen.

Betrachten wir nun genauer den Fall von Nachfolgerordinalzahlen: seien dafür zwei Unterobjekte $i_A : A \hookrightarrow V_{\alpha+1}$ und $i_B : B \hookrightarrow V_{\alpha+1}$ gegeben mit einem Morphismus $f : A \rightarrow B$. Natürlich erhalten wir mittels Komposition von i_B einen Morphismus $i_B \circ f : A \rightarrow V_{\alpha+1}$. Nach Folgerung 2.21, gibt es einen Morphismus $f_{ext} : V_{\alpha+1} \rightarrow V_{\alpha+1}$, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{f} & B \\
\downarrow i_A & & \downarrow i_B \\
V_{\alpha+1} & \xrightarrow{f_{ext}} & V_{\alpha+1}
\end{array}$$

kommutiert. Wir nennen einen solchen Morphismus auch Erweiterung von f auf $V_{\alpha+1}$.

Wir führen noch zwei weitere Schreibweisen ein: Sei $i_A : A \hookrightarrow V_\alpha$ ein Unterobjekt der von-Neumann-Hierarchie und $f_A : 1 \rightarrow V_{\alpha+1}$ die Transponierte des charakteristischen Morphismus $c_A : V_\alpha \times 1 \simeq V_\alpha \rightarrow \Omega$ von i_A . Wir schreiben nun $\llbracket \varphi_A(x) \rrbracket_\alpha$ für $\llbracket x \in y \rrbracket_{\alpha, \alpha+1} \circ (Id \times f_A) = c_A$. Ferner sei $i_B : B \hookrightarrow V_\alpha$ ein weiteres Unterobjekt der von-Neumann-Hierarchie und f ein Morphismus zwischen diesen Unterobjekten, dann schreiben wir $\llbracket f_{ext}(x) = y \rrbracket_{\alpha, \alpha}$ für $\llbracket x = y \rrbracket_{\alpha, \alpha} \circ (f_{ext} \times Id)$.

Nachdem nun der Graph und die Erweiterung eines Morphismus definiert worden sind, wenden wir uns nun der Frage zu, durch welche Formeln diese beschrieben werden können. Das folgende Lemma stellt die erste Verbindung zwischen diesen Begriffen her. Sei nun α eine Nachfolgerordinalzahl.

LEMMA 4.7. Seien $i_A : A \hookrightarrow V_\alpha, i_B : B \hookrightarrow V_\alpha$ zwei Unterobjekte, $f : A \rightarrow B$ ein Morphismus, dann gilt

$$\llbracket \varphi_A(x) \wedge f_{ext}(x) = y \rrbracket_{\alpha, \alpha} = \llbracket \exists_{\alpha+2} z \varphi_A(x) \wedge \varphi_B(y) \wedge \varphi_F(z) \wedge z = (x, y) \rrbracket_{\alpha, \alpha}$$

Beweis: Um die Behauptung zu zeigen, werden wir die Unterobjekte konstruieren, die zu den oben angegebenen Morphismen gehören. Es wird sich herausstellen, dass in beiden Fällen dies das Unterobjekt $(i_A, i_B \circ f) : A \hookrightarrow V_\alpha \times V_\alpha$ sein wird. Wir beginnen also mit der Berechnung des zu $\llbracket \varphi_A(x) \wedge f_{ext}(x) = y \rrbracket_{\alpha, \alpha}$ gehörigen Unterobjektes.

(1) Das folgende Quadrat ist ein Pullback-Quadrat:

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\quad} & 1 \\
 \downarrow (i_A, i_B \circ f) & & \downarrow \mathbf{true} \\
 V_\alpha \times V_\alpha & \xrightarrow{\llbracket \varphi_A(x) \wedge f_{ext}(x)=y \rrbracket_{\alpha, \alpha}} & \Omega
 \end{array}$$

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass dieses Diagramm kommutiert: Nach Definition von f_{ext} und da $\llbracket \varphi_A(x) \rrbracket_\alpha \circ i_A = \mathbf{true}_\alpha$, gilt aber

$$\begin{aligned}
 \llbracket \varphi_A(x) \wedge f_{ext}(x) = y \rrbracket_{\alpha, \alpha} \circ (i_A, i_B \circ f) &= \llbracket f_{ext}(x) = y \rrbracket_{\alpha, \alpha} \circ (i_A, i_B \circ f) \\
 &= =_\alpha \circ (f_{ext} \times Id) \circ (i_A, i_B \circ f) \\
 &= =_\alpha \circ (f_{ext} \circ i_A, i_B \circ f) \\
 &= =_\alpha \circ (i_B \circ f, i_B \circ f) \\
 &= \mathbf{true}_A.
 \end{aligned}$$

Sei nun ein Morphismus $h = (h_1, h_2) : D \rightarrow V_\alpha \times V_\alpha$ mit $\llbracket \varphi_A(x) \wedge f_{ext}(x) = y \rrbracket_{\alpha, \alpha} \circ h = \mathbf{true}_D$ gegeben. Wir erhalten dann einen eindeutig bestimmten $l : D \rightarrow A$ mit $i_A \circ l = h_1$. Desweiteren gilt $f_{ext} \circ h_1 = h_2$. Wieder nach Definition von f_{ext} erhalten wir, dass

$$\begin{aligned}
 (i_\alpha, i_\beta \circ f) \circ l &= (i_\alpha \circ l, i_\beta \circ f \circ l) \\
 &= (h_1, f_{ext} \circ i_A \circ l) \\
 &= (h_1, f_{ext} \circ h_1) = (h_1, h_2).
 \end{aligned}$$

Damit ist das obere Diagramm ein Pullback-Quadrat. □(1)

Als zweites konstruieren wir nun das Unterobjekt, welches zu $\llbracket \varphi_A(x) \wedge \varphi_B(y) \wedge \varphi_F(z) \wedge z = (x, y) \rrbracket_{\alpha, \alpha, \alpha+2}$ korrespondiert.

(2) Das folgende Diagramm ist ein Pullback-Quadrat

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\quad} & 1 \\
 \downarrow (i_A, i_B \circ f) & & \downarrow \mathbf{true} \\
 V_\alpha \times V_\alpha & & \\
 \downarrow (Id \times Id, (-, -)) & & \\
 V_\alpha \times V_\alpha \times V_{\alpha+2} & \xrightarrow{\llbracket \varphi_A(x) \wedge \varphi_B(y) \wedge \varphi_F(z) \wedge z = (x, y) \rrbracket_{\alpha, \alpha, \alpha+2}} & \Omega
 \end{array}$$

Beweis: Zuerst muß nun wieder gezeigt werden, dass das obige Diagramm kommutiert: Da aber der Graph F gerade das Unterobjekt $(-, -)_{A, B} \circ (Id, f)$ ist, erhalten wir leicht

$$\begin{aligned}
 \llbracket \varphi_A(x) \wedge \varphi_B(y) \wedge \varphi_F(z) \wedge z = (x, y) \rrbracket_{\alpha, \alpha, \alpha+2} \circ (Id \times Id, (-, -)) \circ (i_A, i_B \circ f) \\
 &= \llbracket \varphi_A(x) \wedge \varphi_B(y) \wedge \varphi_F(z) \wedge z = (x, y) \rrbracket_{\alpha, \alpha, \alpha+2} \circ (i_A, i_B \circ f, (-, -)_{A, B} \circ (Id, f)) \\
 &= \llbracket z = (x, y) \rrbracket_{\alpha, \alpha, \alpha+2} \circ (i_A, i_B \circ f, (-, -)_{A, B} \circ (Id, f)) \\
 &= \llbracket z = (x, y) \rrbracket_{\alpha, \alpha, \alpha+2} \circ (Id \times Id, (-, -)) \circ (i_A, i_B \circ f) \\
 &= \mathbf{true}_{\alpha, \alpha} \circ (i_A, i_B \circ f) \\
 &= \mathbf{true}_A.
 \end{aligned}$$

Sei nun also wieder ein Morphismus $h = (h_1, h_2, h_3) : D \rightarrow V_\alpha \times V_\alpha \times V_{\alpha+2}$ mit $\llbracket \varphi_A(x) \wedge \varphi_B(y) \wedge \varphi_F(z) \wedge z = (x, y) \rrbracket_{\alpha, \alpha, \alpha+2} \circ h = \mathbf{true}_D$ gegeben. Wir erhalten also eindeutig bestimmte $l_1 : D \rightarrow A$, $l_2 : D \rightarrow B$ und $l_3 : D \rightarrow A$ mit $i_A \circ l_1 = h_1$, $i_B \circ l_2 = h_2$ und $(-, -)_{A,B} \circ (Id, f) \circ l_3 = h_3$. Weiterhin gilt auch $(-, -) \circ (h_1, h_2) = h_3$ und damit $(-, -)_{A,B} \circ (l_1, l_2) = h_3$. Da aber $(-, -)_{A,B}$ ein Monomorphismus, gilt $l_1 = l_3$ und $l_2 = f \circ l_3$. Es folgt, dass

$$\begin{aligned} (Id \times Id, (-, -)) \circ (i_A, i_B \circ f) \circ l_1 &= (i_A \times i_B, (-, -)_{A,B}) \circ (Id, f) \circ l_1 \\ &= (h_1, i_B \circ f \circ l_1, (-, -)_{A,B} \circ (l_1, f \circ l_1)) \\ &= (h_1, i_B \circ f \circ l_3, (-, -)_{A,B} \circ (l_1, f \circ l_3)) \\ &= (h_1, h_2, h_3). \end{aligned}$$

Also ist das obige Quadrat ein Pullbackquadrat. $\square(2)$

Nach (2), wissen wir also nun, dass das zu $\llbracket \exists_{\alpha+2} z \varphi_A(x) \wedge \varphi_B(y) \wedge \varphi_F(z) \wedge z = (x, y) \rrbracket_{\alpha, \alpha}$ gehörigen Unterobjekt das Bild von $(i_A, i_B \circ f)$ ist. Da dies bereits ein Monomorphismus ist, ist das Bild also der Morphismus $(i_A, i_B \circ f)$ selber. Die beiden in der Behauptung angegebenen Morphismen korrespondieren also tatsächlich zum gleichen Unterobjekt von $V_\alpha \times V_\alpha$. Nach der Eindeutigkeit des charakteristischen Morphismus sind diese beiden Morphismen also gleich. \square

Das vorherige Lemma zeigte uns, dass die Formel $\varphi_A(x) \wedge f_{ext}(x) = y$ äquivalent zu einer Σ_0 -Formel ist. Wobei wir Äquivalenz von Formel natürlich als Gleichheit der Interpretationen verstehen. Der nächste Schritt ist nun, dass wir Formeln mit zwei Morphismen $\varphi_A(x) \wedge \varphi_B(y) \wedge f_{ext}(x) = g_{ext}(y)$ auf den schon behandelten Ein-Morphismen-Fall zurückführen. So erhalten wir, dass auch diese Formeln äquivalent zu Σ_0 -Formeln sind.

LEMMA 4.8. Seien $i_A : A \hookrightarrow V_\alpha$, $i_B : B \hookrightarrow V_\alpha$ und $i_C : C \hookrightarrow V_\alpha$ drei Unterobjekte, $f : A \rightarrow C$ und $g : B \rightarrow C$ zwei Morphismen, dann gilt

$$\begin{aligned} \llbracket \varphi_A(x) \wedge \varphi_B(y) \wedge f_{ext}(x) = g_{ext}(y) \rrbracket_{\alpha, \alpha} \\ = \llbracket \varphi_A(x) \wedge \varphi_B(y) \wedge \forall_\alpha z \varphi_C(z) \Rightarrow (f_{ext}(x) = z \Leftrightarrow g_{ext}(y) = z) \rrbracket_{\alpha, \alpha} \end{aligned}$$

Beweis: Sei nun $e : E \hookrightarrow A \times B$ der Equalizer von $f \circ \pi_A : A \times B \rightarrow C$ und $g \circ \pi_B : A \times B \rightarrow C$. Wir werden nun zeigen, dass die beiden Morphismen in Behauptung gerade dem Unterobjekt $(i_A \times i_B) \circ e : E \hookrightarrow V_\alpha \times V_\alpha$ entsprechen und daher nach Eindeutigkeit des charakteristischen Morphismus gleich sind.

(3) Das folgende Diagramm ist ein Pullback-Quadrat:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & 1 \\ \downarrow e & & \downarrow \mathbf{true} \\ A \times B & & \\ \downarrow i_A \times i_B & & \\ V_\alpha \times V_\alpha & \xrightarrow{\llbracket f_{ext}(x_1) = g_{ext}(x_2) \wedge \varphi_A(x_1) \wedge \varphi_B(x_2) \rrbracket_{\alpha, \alpha}} & \Omega \end{array}$$

Beweis: Zuerst ist wieder zu zeigen, dass das obige Quadrat wirklich kommutiert. Da e der Equalizer von $f \circ \pi_A$ und $g \circ \pi_B$ ist, gilt $f \circ \pi_A \circ e = g \circ \pi_B \circ e$. Daher und nach der Definition von f_{ext} und g_{ext} erhalten wir, dass

$$\begin{aligned} & \llbracket f_{ext}(x_1) = g_{ext}(x_2) \wedge \varphi_A(x_1) \wedge \varphi_B(x_2) \rrbracket_{\alpha, \alpha} \circ (i_A \times i_B) \circ e \\ & \quad = =_{\alpha} \circ (f_{ext} \times g_{ext}) \circ (i_A \times i_B) \circ e \\ & \quad = =_{\alpha} \circ (i_C \times i_C) \circ (f \times g) \circ e \\ & \quad = =_{\alpha} \circ (i_C \times i_C) \circ (f \circ \pi_A \circ e, g \circ \pi_B \circ e) \\ & \quad = \mathbf{true}_E. \end{aligned}$$

Sei nun also ein Morphismus $h = (h_1, h_2) : D \rightarrow V_{\alpha} \times V_{\alpha}$ mit $\llbracket f_{ext}(x_1) = g_{ext}(x_2) \wedge \varphi_A(x_1) \wedge \varphi_B(x_2) \rrbracket_{\alpha, \alpha} \circ h = \mathbf{true}_D$ gegeben. Daher gilt $\llbracket \varphi_A(x_1) \rrbracket_{\alpha} \circ h_1 = \mathbf{true}_D$ und $\llbracket \varphi_B(x_2) \rrbracket_{\alpha} \circ h_2 = \mathbf{true}_D$. Also gibt es eindeutig bestimmte Morphismen $l_1 : D \rightarrow A$ und $l_2 : D \rightarrow B$ mit $i_A \circ l_1 = h_1$ und $i_B \circ l_2 = h_2$. Damit folgt, dass $\llbracket f_{ext}(x_1) = g_{ext}(x_2) \rrbracket_{\alpha, \alpha} \circ (i_A \circ l_1, i_B \circ l_2) = \mathbf{true}_D$ gilt und dass nach Lemma 2.31 $f_{ext} \circ i_A \circ l_1 = g_{ext} \circ i_B \circ l_2$ gilt. Nach Definition erhalten wir dann, dass $i_C \circ f \circ l_1 = i_C \circ g \circ l_2$. Schließlich gilt auch $f \circ l_1 = g \circ l_2$, da i_C ein Monomorphismus. Da aber e gerade der Equalizer ist, erhalten wir einen ebenfalls eindeutig bestimmten Morphismus $k : D \rightarrow E$, so dass $e \circ k = (l_1, l_2)$ gilt. Damit gilt $(i_A \times i_B) \circ e \circ k = (h_1, h_2)$. Damit ist auch das obige Diagramm tatsächlich ein Pullback-Quadrat. □(3)

(4) Das folgende Diagramm ist ebenfalls ein Pullback-Quadrat:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ \downarrow e & & \downarrow \mathbf{true} \\ A \times B & & \Omega \\ \downarrow i_A \times i_B & & \downarrow \\ V_{\alpha} \times V_{\alpha} & \xrightarrow{\llbracket \varphi_A(x) \wedge \varphi_B(y) \wedge \forall_{\alpha} z \varphi_C(z) \Rightarrow (f_{ext}(x) = z \Leftrightarrow g_{ext}(y) = z) \rrbracket_{\alpha, \alpha}} & \Omega \end{array}$$

Beweis: Wie schon bei den bisherigen Beweisen ist zuerst zu zeigen, dass das Diagramm überhaupt kommutiert. Offensichtlich ist also zu beweisen, dass $\llbracket \forall_{\alpha} z \varphi_C(z) \Rightarrow (f_{ext}(x) = z \Leftrightarrow g_{ext}(y) = z) \rrbracket_{\alpha, \alpha} \circ (i_A \times i_B) \circ e = \mathbf{true}_E$. Nach Folgerung 2.45 und Lemma 2.42 gilt dies genau dann, wenn

$$\llbracket f_{ext}(x) = z \Leftrightarrow g_{ext}(y) = z \rrbracket_{\alpha, \alpha, \alpha} \circ ((i_A \times i_B) \circ e \times i_C) = \mathbf{true}_{E \times C}.$$

Nach Definition von f_{ext} und g_{ext} und wegen $f \circ \pi_A \circ e = g \circ \pi_B \circ e$, erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} & \llbracket f_{ext}(x) = z \Leftrightarrow g_{ext}(y) = z \rrbracket_{\alpha, \alpha, \alpha} \circ ((i_A \times i_B) \circ e \times i_C) \\ & \quad = =_{\Omega} \circ (=_{V_{\alpha}} \circ (f_{ext} \circ i_A \circ \pi_A \circ e \circ \pi_E, i_C \circ \pi_C)), =_{V_{\alpha}} \circ (g_{ext} \circ i_B \circ \pi_B \circ e \circ \pi_E, i_C \circ \pi_C)) \\ & \quad = =_{\Omega} \circ (=_{V_{\alpha}} \circ (i_C \circ f \circ \pi_A \circ e \circ \pi_E, i_C \circ \pi_C)), =_{V_{\alpha}} \circ (i_C \circ g \circ \pi_B \circ e \circ \pi_E, i_C \circ \pi_C)) \\ & \quad = \mathbf{true}_{E \times C}. \end{aligned}$$

Also kommutiert das obige Diagramm. Sei nun also ein Morphismus $h = (h_1, h_2) : D \rightarrow V_{\alpha} \times V_{\alpha}$ mit $\llbracket \varphi_A(x) \wedge \varphi_B(y) \wedge \forall_{\alpha} z \varphi_C(z) \Rightarrow (f_{ext}(x) = z \Leftrightarrow g_{ext}(y) = z) \rrbracket_{\alpha, \alpha} \circ h = \mathbf{true}_D$ gegeben. Daher gibt es zwei eindeutig bestimmte Morphismen $l_1 : D \rightarrow A$ und $l_2 : D \rightarrow B$ mit $h_1 = i_A \circ l_1$ und $h_2 = i_B \circ l_2$. Ferner gilt

$\llbracket \forall_\alpha z \varphi_C(z) \Rightarrow (f_{ext}(x) = z \Leftrightarrow g_{ext}(y) = z) \rrbracket_{\alpha,\alpha} \circ h = \mathbf{true}_D$ und daher gilt wieder nach Folgerung 2.45 und Lemma 2.42, dass

$$\llbracket f_{ext}(x) = z \Leftrightarrow g_{ext}(y) = z \rrbracket_{\alpha,\alpha,\alpha} \circ (h \times i_C) = \mathbf{true}_{D \times C}$$

gilt. Da nach Definition $f_{ext} \circ i_A = i_C \circ f$ gilt, erhalten wir auch

$$\begin{aligned} \llbracket f_{ext}(x) = z \rrbracket_{\alpha,\alpha}(h_1, i_C \circ f \circ l_1) &= \llbracket f_{ext}(x) = z \rrbracket_{\alpha,\alpha} \circ (i_A \circ l_1, i_C \circ f \circ l_1) \\ &= =_\alpha \circ (f_{ext} \circ i_A \circ l_1, i_C \circ f \circ l_1) \\ &= =_\alpha \circ (i_C \circ f \circ l_1, i_C \circ f \circ l_1) \\ &= \mathbf{true}_{D \times D}. \end{aligned}$$

Fassen wir nun die beiden letzten Ergebnisse zusammen:

$$\begin{aligned} \mathbf{true}_{D \times D} &= \llbracket f_{ext}(x) = z \Leftrightarrow g_{ext}(y) = z \rrbracket_{\alpha,\alpha,\alpha} \circ (h \times i_C) \circ (Id \times f \circ l_1) \\ &= \llbracket f_{ext}(x) = z \Leftrightarrow g_{ext}(y) = z \rrbracket_{\alpha,\alpha,\alpha} \circ ((h_1, h_2) \times i_C \circ f \circ l_1) \\ &= \llbracket g_{ext}(y) = z \rrbracket_{\alpha,\alpha} \circ (h_2 \times i_C \circ f \circ l_1) \\ &= \llbracket g_{ext}(y) = z \rrbracket_{\alpha,\alpha} \circ (i_B \circ l_2 \times i_C \circ f \circ l_1) \\ &= =_\alpha \circ (i_C \times i_C) \circ (g \times f) \circ (l_2, l_1). \end{aligned}$$

Also gilt nach Lemma 2.31 $i_C \circ f \circ l_1 = i_C \circ g \circ l_2$. Nach Definition ist i_C aber ein Monomorphismus und daher gilt $f \circ l_1 = g \circ l_2$. Also gilt gerade $f \circ \pi_1 \circ (l_1, l_2) = g \circ \pi_2 \circ (l_1, l_2)$. Da e Equalizer dieser Morphismen ist, gibt es einen eindeutigen Morphismus $k : D \rightarrow E$ mit $e \circ k = (l_1, l_2)$. Damit gilt dann auch $(i_A \times i_B) \circ e \circ k = h$. Also ist das obige Diagramm ein Pullback-Quadrat.

□(4)

Nun gilt nach (3) und (4), dass beide Morphismen in unserer Behauptung charakteristische Morphismen des gleichen Unterobjektes sind. Aus den Eindeutigkeit von charakteristischen Morphismen erhalten wir so die Gleichheit.

□

Die beiden Lemmata haben also nun gezeigt, dass sowohl Formeln der Form $\varphi_A(x) \wedge f_{ext}(x) = y$ als auch Formeln der Form $\varphi_A(x) \wedge \varphi_B(y) \wedge f_{ext}(x) = g_{ext}(y)$ äquivalent zu Σ_0 -Formeln sind. Wie schon erwähnt, werden wir von unserer Hierarchie noch Σ_0 -Abgeschlossenheit fordern. Es ist daher nicht überraschen, dass die Erkenntnis, dass die obigen Formeln zu Σ_0 -Formeln äquivalent sind, ein wichtiges Hilfsmittel für spätere Beweise sein wird. Wir beweisen noch ein weiteres technisches Lemma, welches die späteren Beweise vereinfacht. Wir schreiben im folgenden $i_\beta^\alpha \circ B$ für das Unterobjekt $i_\beta^\alpha \circ i_B : B \hookrightarrow V_\alpha$, falls $i_B : B \hookrightarrow V_\beta$. Diese beiden Monomorphismen repräsentieren natürlich dasselbe Unterobjekt der von-Neumann-Hierarchie.

LEMMA 4.9. Seien $i_A : A \hookrightarrow V_\alpha$, $i_B : B \hookrightarrow V_\beta$ und $i_C : C \hookrightarrow V_\gamma$ drei Unterobjekte mit $\beta \leq \alpha$, $m : T \hookrightarrow A \times B \times C$ ein Monomorphismus und φ eine Formel ist. Falls $\llbracket \varphi \rrbracket_{\alpha,\beta,\gamma}$ der charakteristische Morphismus von $(i_A \times i_B \times i_C) \circ m$ ist, dann ist $\llbracket \exists_\alpha x_1 \exists_\beta x_2 \varphi \wedge x_4 = (x_1, x_2) \rrbracket_{\gamma,\alpha+2}$ der charakteristische Morphismus von $(i_C \circ \pi_C, (-, -)_{A, i_\beta^\alpha \circ B} \circ \pi_{A \times B}) \circ m$.

Beweis: Wir zeigen nun zuerst, dass das folgende Diagramm ein Pullback-Quadrat ist:

$$\begin{array}{ccc}
T & \xrightarrow{\quad} & 1 \\
\downarrow m & & \downarrow \mathbf{true} \\
A \times B \times C & & \Omega \\
\downarrow (i_A \times i_B \times i_C, (-, -)_{A, i_B^\alpha \circ B}) & & \downarrow \\
V_\alpha \times V_\beta \times V_{\bar{\gamma}} \times V_{\alpha+2} & \xrightarrow{\llbracket \varphi \wedge x_4 = (x_1, x_2) \rrbracket_{\alpha, \beta, \bar{\gamma}, \alpha+2}} & \Omega
\end{array}$$

Nach Lemma 3.7 gilt

$$\begin{aligned}
& \llbracket x_4 = (x_1, x_2) \rrbracket_{\alpha, \beta, \alpha+2} \circ (i_A \times i_B, (-, -)_{A, i_B^\alpha \circ B}) \circ m \\
&= \llbracket x_4 = (x_1, x_2) \rrbracket_{\alpha, \alpha, \alpha+2} \circ (Id \times i_B^\alpha \times Id) \circ (i_A \times i_B, (-, -)_{A, i_B^\alpha \circ B}) \circ m \\
&= \llbracket x_4 = (x_1, x_2) \rrbracket_{\alpha, \alpha, \alpha+2} \circ (Id \times Id, (-, -)) \circ (i_A \times i_B^\alpha \circ i_B) \circ m \\
&= \mathbf{true}_{\alpha, \alpha} \circ (i_A \times i_B^\alpha \circ i_B) \circ m \\
&= \mathbf{true}_T.
\end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung auch $\llbracket \varphi \rrbracket_{\alpha, \beta, \bar{\gamma}} \circ (i_A \times i_B \times i_C) \circ m = \mathbf{true}_T$ gilt, kommutiert das obige Diagramm. Sei nun ein Morphismus $f = (f_1, f_2, f_3, f_4) : D \rightarrow V_\alpha \times V_\beta \times V_{\bar{\gamma}} \times V_{\alpha+2}$ mit $\llbracket \varphi \wedge x_4 = (x_1, x_2) \rrbracket_{\alpha, \beta, \bar{\gamma}, \alpha+2} \circ f = \mathbf{true}_D$ gegeben. Dann gilt $\llbracket \varphi \rrbracket_{\alpha, \beta, \bar{\gamma}} \circ (f_1, f_2, f_3) = \mathbf{true}_D$. Nach Voraussetzung gibt es dann einen Morphismus $g : D \rightarrow T$ mit $(i_A \times i_B \times i_C) \circ m \circ g = (f_1, f_2, f_3)$. Ferner gilt

$$\begin{aligned}
\mathbf{true}_D &= \llbracket x_4 = (x_1, x_2) \rrbracket_{\alpha, \beta, \alpha+2} \circ (f_1, f_2, f_4) \\
&= \llbracket x_4 = (x_1, x_2) \rrbracket_{\alpha, \alpha, \alpha+2} \circ (f_1, i_B^\alpha \circ f_2, f_4).
\end{aligned}$$

Damit gilt dann, dass $(-, -) \circ (f_1, i_B^\alpha \circ f_2) = f_4$. Daher erhalten wir insgesamt, dass

$$\begin{aligned}
& (i_A \times i_B \times i_C, (-, -)_{A, i_B^\alpha \circ B}) \circ m \circ g \\
&= (i_A \circ m \circ g, i_B \circ m \circ g, i_C \circ m \circ g, (-, -)_{A, i_B^\alpha \circ B} \circ m \circ g) \\
&= (f_1, f_2, f_3, (-, -) \circ (i_A \times i_B^\alpha \circ i_B) \circ m \circ g) \\
&= (f_1, f_2, f_3, (-, -) \circ (Id \times i_B^\alpha) \circ (f_1, f_2)) \\
&= (f_1, f_2, f_3, f_4).
\end{aligned}$$

Damit ist das obige Diagramm ein Pullback-Quadrat. Nach Definition ist dann $\llbracket \exists_\alpha x_1 \exists_\beta x_2 \varphi \wedge x_4 = (x_1, x_3) \rrbracket_{\bar{\gamma}, \alpha+2}$ der charakteristische Morphismus des Bildes von $(i_C \circ \pi_C, (-, -)_{A, i_B^\alpha \circ B} \circ \pi_{A \times B}) \circ m$. Es gilt

$$\rho \circ ((-, -)_{A, i_B^\alpha \circ B} \times i_C) \circ m = (i_C \circ \pi_C, (-, -)_{A, i_B^\alpha \circ B} \circ \pi_{A \times B}) \circ m,$$

wobei $\rho : V_{\bar{\gamma}} \times V_{\alpha+2} \rightarrow V_{\alpha+2} \times V_{\bar{\gamma}}$ gerade der Isomorphismus ist, der die Koordinaten vertauscht. Also ist $(i_C \circ \pi_C, (-, -)_{A, i_B^\alpha \circ B} \circ \pi_{A \times B}) \circ m$ ein Monomorphismus und er ist also selbst das zu $\llbracket \exists_\alpha x_1 \exists_\beta x_2 \varphi \wedge x_4 = (x_1, x_2) \rrbracket_{\bar{\gamma}, \alpha+2}$ gehörige Unterobjekt. \square

3. Definition Innerer Topoi

Sei nun eine Unterhierarchie $\mathcal{M} = (M_\alpha)_\alpha \in On$ gegeben. Für alle Unterobjekte $i_A : A \hookrightarrow V_\alpha$ haben wir ja bereits den zugehörigen charakteristischen Morphismus

mit $\llbracket \varphi_A \rrbracket_\alpha$ bezeichnen. Im folgenden wird nun die Transponierte dieses Morphismus eine wichtige Rolle spielen. Die Transponierte von $\llbracket \varphi_A \rrbracket_\alpha$ ist nach Definition der eindeutig bestimmte Morphismus $f_A : 1 \rightarrow \Omega^{V_\alpha}$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} V_\alpha \times 1 \simeq V_\alpha & & \\ \downarrow Id \times f_A & \searrow \llbracket \varphi_A \rrbracket_\alpha & \\ V_\alpha \times \Omega^{V_\alpha} & \xrightarrow{ev_\alpha} & \Omega \end{array}$$

DEFINITION 4.10. Sei $i_A : A \hookrightarrow V_\alpha$ ein Unterobjekt von V_α , wir sagen i_A liegt in \mathcal{M} , falls i_A durch m_α und f_A durch $m_{\alpha+1}$ faktorisiert.

LEMMA 4.11. Sei $i_A : A \hookrightarrow V_\alpha$ ein Unterobjekt, welches in \mathcal{M} liegt, und $\alpha, \beta \in On$ mit $\alpha \leq \beta$, dann liegt $i_\alpha^\beta \circ i_A$ auch in \mathcal{M} .

Beweis: Da i_A durch m_α faktorisiert, erhalten wir direkt, dass $i_\alpha^\beta \circ i_A$ durch $i_\alpha^\beta \circ m_\alpha$ faktorisiert. Aber nach (i) und (iii) in der Definition einer Hierarchie gilt dann auch, dass $i_\alpha^\beta \circ m_\alpha$ durch m_β faktorisiert. Also faktorisiert $i_\alpha^\beta \circ i_A$ durch m_β . Mit dem gleichen Argument, zeigt man, dass auch $i_{\alpha+1}^{\beta+1} \circ f_A$ durch $m_{\beta+1}$ faktorisiert. Nach Konstruktion der von-Neumann-Hierarchie gilt bekanntlich $i_{\alpha+1}^{\beta+1} = \exists_{i_\alpha^\beta}$. Mit Lemma 2.54 erhalten wir dann, dass die Transponierte des charakteristischen Morphismus von $(i_\alpha^\beta \times Id_1) \circ (i_A, !_A)$ gerade $\exists_{i_\alpha^\beta} \circ f_A$ ist. Daher liegt auch $i_\alpha^\beta \circ i_A$ in \mathcal{M} . □

Sei nun $(i_A : A \hookrightarrow V_\alpha)_\sim$ ein Unterobjekt der von-Neumann-Hierarchie. Wir sagen, dass $(i_A : A \hookrightarrow V_\alpha)_\sim$ in \mathcal{M} liegt, falls es ein $\beta \geq \alpha$ gibt, so dass $i_\alpha^\beta \circ i_A$ in \mathcal{M} . Nach dem vorherigen Lemma 4.11 ist dies unabhängig von der Wahl der Repräsentanten. Sei $(i_B : B \hookrightarrow V_\beta)_\sim$ ein zweites Unterobjekt der von-Neumann-Hierarchie und $(f : A \rightarrow B)_\sim$ ein Morphismus zwischen den beiden Unterobjekten, dann sagen wir das $(f : A \rightarrow B)_\sim$ ein Morphismus in \mathcal{M} ist, falls dessen Graph in \mathcal{M} liegt.

Es ist nun also deutlich wie die Unterkategorie $V_{\mathcal{M}}$ von $V_{\mathcal{E}}$ aussehen soll: die Objekte werden die Unterobjekte der von-Neumann-Hierarchie sein, die in \mathcal{M} liegen, und Morphismen werden gerade die Morphismen sein, die ebenfalls in \mathcal{M} liegen. Wie bereits mehrfach erwähnt, müssen wir aber noch weitere Bedingungen an die Hierarchie stellen, damit $V_{\mathcal{M}}$ tatsächlich eine Kategorie und dann auch ein Topos ist. Wir werden diese nun genau spezifizieren.

DEFINITION 4.12. Eine Formel φ heißt Σ_0 -Formel, falls sie von der Form

- (i) φ ist atomar, also von Form $x_i \in x_j$, $x_i = x_j$ oder x_j , falls x_j vom Typ Ω ist,
- (ii) $\varphi = \psi \Rightarrow \chi$, wobei ψ und χ Σ_0 -Formeln sind,
- (iii) $\varphi = \psi \wedge \chi$, wobei ψ und χ Σ_0 -Formeln sind,
- (iv) $\varphi = \psi \vee \chi$, wobei ψ und χ Σ_0 -Formeln sind,
- (v) $\varphi = \forall x_1 (x_1 \in x_2 \Rightarrow \psi)$, wobei ψ eine Σ_0 -Formeln ist,
- (vi) $\varphi = \exists x_1 x_1 \in x_2 \wedge \psi$, wobei ψ eine Σ_0 -Formeln ist.

DEFINITION 4.13. Eine Unterhierarchie $\mathcal{M} = (M_\alpha)_{\alpha \in On}$ ist abgeschlossen unter Σ_0 -Formeln, falls für jede Σ_0 -Formel φ mit freien Variablen (x_1, x_3, \dots, x_n) und für alle $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in On$ und $i_A : A_j \hookrightarrow V_{\alpha_j} \in ob(\mathcal{M})$, gilt, dass das zu

$$\llbracket x_1 \in x_2 \wedge \varphi(x_1, x_3, \dots, x_n) \rrbracket_{\bar{\alpha}} \circ (Id, f_2, \dots, f_n) : V_{\alpha_1} \rightarrow \Omega$$

gehörige Unterobjekt in \mathcal{M} liegt, wobei f_j wieder die Transponierte des charakteristischen Morphismus von i_{A_j} ist.

DEFINITION 4.14. Eine Unterhierarchie $\mathcal{M} = (M_\alpha)_{\alpha \in O_n}$ ist abgeschlossen unter Produkten, falls für alle $i_A : A \rightarrow V_\alpha$ und $i_B : B \rightarrow V_\alpha$, die in \mathcal{M} liegen, das Unterobjekt der von-Neumann-Hierarchie $(-, -)_{A,B}$ auch in \mathcal{M} liegt.

Sei \mathcal{M} nun abgeschlossen unter Produkten und $(i_A : A \rightarrow V_\alpha)_\sim$ liege in \mathcal{M} . Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass i_A in \mathcal{M} liege. Dann ist der Graph von $Id : A \rightarrow A$ bzgl. i_A gerade $(-, -) \circ (i_A, i_A)$. Nach Abgeschlossenheit bzgl. Produkten wissen wir bereits, dass $(-, -)_{A,A} : A \times A \hookrightarrow V_{\alpha+2}$ in \mathcal{M} liegt.

(1) Das folgende Diagramm ist ein Pullback-Quadrat:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & 1 \\ \downarrow (i_A, (-, -) \circ (i_A, i_A)) & & \downarrow \mathbf{true} \\ V_\alpha \times V_{\alpha+2} & \xrightarrow{\llbracket \varphi_{A \times A}(x_2) \wedge \varphi_A(x_1) \wedge x_2 = (x_1, x_1) \rrbracket_{\alpha, \alpha+2}} & \Omega \end{array}$$

Beweis: Zuerst zeigen wir wieder, dass das obige Diagramm überhaupt kommutiert. Sei $\Delta_A = (Id, Id) : A \rightarrow A \times A$ der Diagonalmorphismus, dann gilt $(i_A \times i_A) \circ \Delta_A = (i_A, i_A)$. Damit erhalten wir, dass

$$\begin{aligned} \llbracket x_2 = (x_1, x_1) \rrbracket_{\alpha, \alpha+2} \circ (i_A, (-, -) \circ (i_A \times i_A) \circ \Delta_A) \\ &= {}_{\alpha+2} \circ ((-, -) \circ \Delta_{V_\alpha} \circ i_A, (-, -) \circ (i_A \times i_A) \circ \Delta_A) \\ &= {}_{\alpha+2} \circ ((-, -) \circ (i_A \times i_A) \circ \Delta_A, (-, -) \circ (i_A \times i_A) \circ \Delta_A) \\ &= \mathbf{true}_A \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \llbracket \varphi_{A \times A}(x_2) \rrbracket_{\alpha, \alpha+2} \circ (i_A, (-, -) \circ (i_A \times i_A) \circ \Delta_A) \\ &= \llbracket \varphi_{A \times A}(x_2) \rrbracket_{\alpha+2} \circ ((-, -) \circ (i_A \times i_A) \circ \Delta_A) \\ &= \mathbf{true}_{A \times A} \circ \Delta_A = \mathbf{true}_A. \end{aligned}$$

Also kommutiert das obige Diagramm. Sei nun $h = (h_1, h_2) : D \rightarrow V_\alpha \times V_{\alpha+2}$ mit $\llbracket \varphi_{A \times A}(x_2) \wedge \varphi_A(x_1) \wedge x_2 = (x_1, x_1) \rrbracket_{\alpha, \alpha+2} \circ h = \mathbf{true}_D$. Da dann auch $\llbracket \varphi_A \rrbracket_\alpha \circ h_1 = \mathbf{true}_D$, gibt es einen eindeutig bestimmten Morphismus $l : D \rightarrow A$ mit $i_A \circ l = h_1$. Nach Lemma 2.31 gilt $(-, -) \circ (h_1, h_1) = h_2$, da $\llbracket x_2 = (x_1, x_1) \rrbracket_{\alpha, \alpha+2} \circ h = \mathbf{true}_D$. Insgesamt erhalten wir also

$$\begin{aligned} (i_A, (-, -) \circ (i_A, i_A)) \circ l &= (h_1, (-, -) \circ (h_1, h_1)) \\ &= (h_1, h_2). \end{aligned}$$

Damit ist das obige Diagramm also ein Pullback-Quadrat.

□(1)

Als Folgerung aus (1) erhalten wir dann direkt, dass $\llbracket \exists_\alpha x_1 \varphi_{A \times A}(x_2) \wedge \varphi_A(x_1) \wedge x_2 = (x_1, x_1) \rrbracket_{\alpha, \alpha+2}$ das Bild von $(-, -) \circ (i_A, i_A)$ ist. Da $(-, -) \circ (i_A, i_A)$ bereits ein Monomorphismus, ist es selber das Bild. Damit haben wir gezeigt, dass der Graph von $(Id : A \rightarrow A)_\sim$ durch ein Σ_0 -Formel definiert ist und somit in \mathcal{M} liegt. Damit haben wir also überprüft, ob unsere Kategorie $V_{\mathcal{M}}$ Identitäten besitzt. Es bleibt also nun zu überprüfen, ob $V_{\mathcal{M}}$ auch abgeschlossen bzgl. Komposition von Morphismen ist. Seien also drei Objekte aus $V_{\mathcal{M}}$ $i_A : A \hookrightarrow V_\alpha$, $i_B : B \hookrightarrow V_\alpha$ und

$i_C : C \hookrightarrow V_\alpha$ und ferner zwei Morphismen aus $V_{\mathcal{M}}$ $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$ gegeben. Sei $h := g \circ f$.

(2) Das folgende Diagramm ist ein Pullback-Quadrat

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\quad} & 1 \\
 \downarrow (Id, h, f) & & \downarrow \mathbf{true} \\
 A \times C \times B & & \\
 \downarrow i_A \times i_C \times i_B & & \\
 V_\alpha \times V_\alpha \times V_\alpha & \xrightarrow{k} & \Omega
 \end{array}$$

wobei $k = \llbracket \varphi_A(x_1) \wedge \varphi_C(x_2) \wedge \varphi_B(x_3) \wedge g_{ext}(x_3) = x_2 \wedge f_{ext}(x_1) = x_3 \rrbracket_{\alpha, \alpha, \alpha}$.

Beweis: Zuerst zeigen wir wieder die Kommutativität des obigen Diagramm. Nach Definition von g_{ext} und wegen $h = g \circ f$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \llbracket g_{ext}(x_3) = x_2 \rrbracket_{\alpha, \alpha} \circ (i_C \circ h, i_B \circ f) &= =_\alpha \circ (i_C \circ h, g_{ext} \circ i_B \circ f) \\
 &= =_\alpha \circ (i_C \circ h, i_C \circ g \circ f) \\
 &= \mathbf{true}_A.
 \end{aligned}$$

Ähnlich erhalten wir ebenfalls $\llbracket f_{ext}(x_1) = x_3 \rrbracket_{\alpha, \alpha} \circ (i_A, i_B \circ f) = \mathbf{true}_A$. Damit kommutiert das obige Diagramm.

Sei nun ein Morphismus $l = (l_1, l_2, l_3) : D \rightarrow V_\alpha \times V_\alpha \times V_\alpha$ gegeben mit $k \circ l = \mathbf{true}_D$. Da $\llbracket \varphi_A \rrbracket_\alpha \circ l_1 = \llbracket \varphi_C \rrbracket_\alpha \circ l_2 = \llbracket \varphi_B \rrbracket_\alpha \circ l_3 = \mathbf{true}_D$, existieren drei eindeutig bestimmte Morphismen $k_1 : D \rightarrow A$, $k_2 : D \rightarrow C$ und $k_3 : D \rightarrow B$ mit $i_A \circ k_1 = l_1$, $i_C \circ k_2 = l_2$ und $i_B \circ k_3 = l_3$. Weiterhin gilt $\llbracket g_{ext}(x_3) = x_2 \wedge f_{ext}(x_1) = x_3 \rrbracket \circ (l_1, l_2, l_3) = \mathbf{true}_D$. Daraus folgt $g_{ext} \circ l_3 = l_2$ und $f_{ext} \circ l_1 = l_3$. Also gilt nach Definition von g_{ext} und f_{ext} und nach $h = g \circ f$, dass

$$\begin{aligned}
 i_C \circ h \circ k_1 &= i_C \circ g \circ f \circ k_1 \\
 &= g_{ext} \circ i_B \circ f \circ k_1 \\
 &= g_{ext} \circ f_{ext} \circ i_A \circ k_1 \\
 &= g_{ext} \circ f_{ext} \circ l_1 \\
 &= g_{ext} \circ l_3 = l_2
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 i_B \circ f \circ k_1 &= f_{ext} \circ i_A \circ k_1 \\
 &= f_{ext} \circ l_1 = l_3.
 \end{aligned}$$

Nutzen wir nun diese beiden Gleichungen aus, ergibt dies

$$\begin{aligned}
 (i_A \times i_C \times i_B) \circ (Id, h, f) \circ k_1 \\
 &= (l_1, i_C \circ h \circ k_1, i_B \circ f \circ k_1) \\
 &= (l_1, l_2, l_3).
 \end{aligned}$$

Damit ist das obige Diagramm ein Pullback-Quadrat.

□(2)

Aus (2) und Lemma 4.9 folgt nun, dass $\llbracket \exists_\alpha x_1 \exists_\alpha x_2 \exists_\alpha x_3 \varphi_A(x_1) \wedge \varphi_C(x_2) \wedge \varphi_B(x_3) \wedge \varphi_{A \times B}(x_4) \wedge x_4 = (x_1, x_2) \wedge g_{ext}(x_3) = x_2 \wedge f_{ext}(x_1) = x_2 \rrbracket_{\alpha+2}$ gerade der charakteristische Morphismus des Bildes von $(-, -)_{A, C} \circ (Id, h)$ ist. Da dies

aber schon ein Monomorphismus ist, ist es also $(-, -)_{A,C} \circ (Id, h)$ selbst. Nach den Lemma 4.7 wissen wir das diese definierende Formel äquivalent zu einer Σ_0 -Formel ist. Da weiterhin i_A, i_B und i_C und nach Produktabgeschlossenheit auch $(-, -)_{A,B}$ in \mathcal{M} liegen, liegt also der Graph von h ebenfalls in \mathcal{M} . Damit ist $V_{\mathcal{M}}$ abgeschlossen unter Morphismen. Damit gilt:

FOLGERUNG 4.15. $V_{\mathcal{M}}$ ist eine Kategorie.

4. Limiten in $V_{\mathcal{M}}$

Nachdem nun die Kategorie $V_{\mathcal{M}}$ definiert ist, ist nun der nächste Schritt zu zeigen, dass es sich um einen Topos handeln. Dafür werden wir in den folgenden Abschnitten entsprechende Σ_0 -Formeln angeben, die gerade die Strukturen eines Toposes beschreiben. In diesem Abschnitt wird dies für die Limiten geschehen.

Seien also nun zwei Unterobjekte $i_A : A \hookrightarrow V_\alpha$ und $i_B : B \hookrightarrow V_\alpha$ gegeben, die beide in \mathcal{M} liegen. Da unsere Hierarchie unter Produkten abgeschlossen, liegt demnach ebenfalls $(-, -)_{A,B} : A \times B \hookrightarrow V_{\alpha+2}$ in \mathcal{M} . Um zu zeigen, dass $V_{\mathcal{M}}$ endliche Produkte besitzt, müssen wir also zeigen, dass $(-, -)_{A,B}$ auch wieder das Produkt von i_A und i_B in $V_{\mathcal{M}}$ ist. Zuerst betrachten wir dafür die Projektionen $\pi_A : A \times B \rightarrow A$ und $\pi_B : A \times B \rightarrow B$.

(1) Das folgende Diagramm ist ein Pullback-Quadrat

$$\begin{array}{ccc}
 A \times B & \xrightarrow{\quad} & 1 \\
 \downarrow (Id, \pi_B) & & \downarrow \mathbf{true} \\
 A \times B \times B & & \\
 \downarrow i_A \times i_B \times i_B & & \\
 V_\alpha \times V_\alpha \times V_\alpha & \xrightarrow{g} & \Omega
 \end{array}$$

wobei $g = \llbracket \varphi_A(x_1) \wedge \varphi_B(x_2) \wedge \varphi_B(x_3) \wedge x_2 = x_3 \rrbracket_{\alpha, \alpha, \alpha}$.

Beweis: Beweisen wir als zunächst wieder die Kommutativität. Dies folgt direkt aus

$$\begin{aligned}
 \llbracket x_2 = x_3 \rrbracket_{\alpha, \alpha, \alpha} \circ (i_A \times i_B \times i_B) \circ (Id, \pi_B) &= \llbracket x_2 = x_3 \rrbracket_{\alpha, \alpha} \circ (i_B \times i_B) \circ \pi_B \\
 &= \llbracket x_2 = x_3 \rrbracket_{\alpha, \alpha} \circ \Delta_{V_\alpha} \circ i_B \circ \pi_B \\
 &= \mathbf{true}_\alpha \circ i_B \circ \pi_B \\
 &= \mathbf{true}_{A \times B}.
 \end{aligned}$$

Sei nun ein Morphismus $f = (f_1, f_2, f_3) : D \rightarrow V_\alpha \times V_\alpha \times V_\alpha$ gegeben mit $g \circ f = \mathbf{true}_D$. Dann gilt $\llbracket \varphi_A \rrbracket_\alpha \circ f_1 = \llbracket \varphi_B \rrbracket_\alpha \circ f_2 = \mathbf{true}_D$ und daher gibt es $h_1 : D \rightarrow A$ und $h_2 : D \rightarrow B$ mit $i_A \circ h_1 = f_1$ und $i_B \circ h_2 = f_2$. Ferner gilt, dass $f_2 = f_3$, da $\llbracket x_2 = x_3 \rrbracket_{\alpha, \alpha, \alpha} \circ f = \mathbf{true}_D$. Damit erhalten wir insgesamt

$$\begin{aligned}
 (i_A \times i_B \times i_B) \circ (Id, \pi_B) \circ (h_1, h_2) &= (i_A \circ h_1, i_A \circ h_2, i_A \circ h_2) \\
 &= (f_1, f_2, f_3).
 \end{aligned}$$

Damit ist das obige Diagramm ein Pullback-Quadrat.

□(1)

Nach (1) und Lemma 4.9 ist also das zu $\llbracket \exists_\alpha x_1 \exists_\alpha x_2 \varphi_A(x_1) \wedge \varphi_B(x_2) \wedge \varphi_B(x_3) \wedge x_2 = x_3 \wedge x_4 = (x_1, x_2) \rrbracket_{\alpha, \alpha+2}$ gehörige Unterobjekt gerade $(i_B \circ \pi_3, (-, -)_{A,B} \circ \pi_{1,2}) \circ (\pi_B, Id)$. Wieder nach Lemma 4.9 ist dann das zu $\llbracket \exists_{\alpha+2} x_4 \exists_\alpha x_3 \exists_\alpha x_1 \exists_\alpha x_2 \varphi_A(x_1) \wedge$

$\varphi_B(x_2) \wedge \varphi_B(x_3) \wedge \varphi_{A \times B}(x_4) \wedge \varphi_{(A \times B) \times B}(x_5) \wedge x_2 = x_3 \wedge x_4 = (x_1, x_2) \wedge x_5 = (x_4, x_1) \Big]_{\alpha+4}$ gehörige Unterobjekt gerade $(-, -)_{A \times B, i_{\alpha+2} \circ B} \circ (Id, \pi_B)$.

Also impliziert (1), dass der Graph von π_B das Unterobjekt ist, welches zu $\llbracket \exists_{\alpha+2} x_4 \exists_{\alpha} x_3 \exists_{\alpha} x_1 \exists_{\alpha} x_2 \varphi_A(x_1) \wedge \varphi_B(x_2) \wedge \varphi_B(x_3) \wedge \varphi_{A \times B}(x_4) \wedge \varphi_{(A \times B) \times B}(x_5) \wedge x_2 = x_3 \wedge x_4 = (x_1, x_2) \wedge x_5 = (x_4, x_1) \rrbracket_{\alpha+4}$ gehört. Nach Σ_0 -Abgeschlossenheit unserer Hierarchie liegt also der Graph von π_B in \mathcal{M} . Damit ist π_B ein Morphismus in $V_{\mathcal{M}}$. Mit den gleichen Argumenten erhält natürlich ebenfalls, dass auch π_A ein Morphismus in $V_{\mathcal{M}}$ ist.

Sei nun ein weiteres Unterobjekt $i_T : T \hookrightarrow V_{\beta}$ gegeben, dass ebenfalls in \mathcal{M} liegt. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $\beta \geq \alpha$. Ferner seien zwei Morphismen $f : T \rightarrow A$ und $g : T \rightarrow B$ gegeben, die in \mathcal{M} liegen. Da $A \times B$ das Produkt von A und B in unserem Topos \mathcal{E} , gibt es dann einen eindeutig bestimmten Morphismus $h : T \rightarrow A \times B$ mit $\pi_A \circ h = f$ und $\pi_B \circ h = g$, also $h = (f, g)$. Wir wollen nun wieder zeigen, dass dieser Morphismus h in \mathcal{M} liegt.

(2) Das folgende Diagramm ist ein Pullback-Quadrat:

$$\begin{array}{ccc}
 T & \xrightarrow{\quad} & 1 \\
 \downarrow (Id, h) & & \downarrow \text{true} \\
 T \times A \times B & & \Omega \\
 \downarrow i_T \times i_{\alpha}^{\beta} \circ i_A \times i_{\alpha}^{\beta} \circ i_B & \xrightarrow{\quad b \quad} & \downarrow \\
 V_{\beta} \times V_{\beta} \times V_{\beta} & \xrightarrow{\quad} & \Omega
 \end{array}$$

wobei $b = \llbracket \varphi_T(x_1) \wedge \varphi_{i_{\alpha}^{\beta} \circ A}(x_2) \wedge \varphi_{i_{\alpha}^{\beta} \circ B}(x_3) \wedge f_{ext}(x_1) = x_2 \wedge g_{ext}(x_1) = x_3 \rrbracket_{\beta, \beta, \beta}$.

Beweis: Nach Voraussetzung an h und f und aus der Definition von f_{ext} erhalten wir, dass

$$\begin{aligned}
 \llbracket f_{ext}(x_1) = x_2 \rrbracket_{\beta, \beta, \beta} &= (i_T \times i_{\alpha}^{\beta} \circ i_A \times i_{\alpha}^{\beta} \circ i_B) \circ (Id, h) \\
 &= \llbracket f_{ext}(x_1) = x_2 \rrbracket_{\beta, \beta} (i_T, i_{\alpha}^{\beta} \circ i_A \circ \pi_A \circ h) \\
 &= =_{\alpha} (f_{ext} \circ i_T, i_{\alpha}^{\beta} \circ i_A \circ \pi_A \circ h) \\
 &= =_{\alpha} (i_{\alpha}^{\beta} \circ i_A \circ f, i_{\alpha}^{\beta} \circ i_A \circ \pi_A \circ h) \\
 &= \mathbf{true}_T.
 \end{aligned}$$

Mit den gleichen Argumenten erhalten wir $\llbracket g_{ext}(x_1) = x_3 \rrbracket_{\beta, \beta, \beta} (i_T \times i_{\alpha}^{\beta} \circ i_A \times i_{\alpha}^{\beta} \circ i_B) \circ (Id, h) = \mathbf{true}_T$. Damit kommutiert das obige Diagramm. Sei nun $l = (l_1, l_2, l_3) : D \rightarrow V_{\beta} \times V_{\beta} \times V_{\beta}$ ein Morphismus mit $b \circ l = \mathbf{true}_D$. Dann gilt $\llbracket \varphi_T \rrbracket_{\beta} \circ l_1 = \mathbf{true}_D$ und damit gibt es einen Morphismus $k : D \rightarrow T$ mit $i_T \circ k = l_1$. Da $\llbracket f_{ext}(x_1) = x_2 \wedge g_{ext}(x_1) = x_3 \rrbracket_{\beta, \beta, \beta} \circ l = \mathbf{true}_D$, gilt ebenfalls, dass $f_{ext} \circ l_1 = l_2$ und $g_{ext} \circ l_1 = l_3$. Damit ergibt sich insgesamt

$$\begin{aligned}
 (i_T \times i_{\alpha}^{\beta} \circ i_A \times i_{\alpha}^{\beta} \circ i_B) \circ (Id, h) \circ k &= (i_T \circ k, i_{\alpha}^{\beta} \circ i_A \circ \pi_A \circ h \circ k, i_{\alpha}^{\beta} \circ i_B \circ \pi_B \circ h \circ k) \\
 &= (l_1, i_{\alpha}^{\beta} \circ i_A \circ f \circ k, i_{\alpha}^{\beta} \circ i_B \circ g \circ k) \\
 &= (l_1, f_{ext} \circ i_T \circ k, g_{ext} \circ i_T \circ k) \\
 &= (l_1, f_{ext} \circ l_1, g_{ext} \circ l_1) \\
 &= (l_1, l_2, l_3).
 \end{aligned}$$

Damit ist das obige Diagramm ein Pullback-Quadrat.

□(2)

Nach (2) und Lemma 4.9 ist dann $\llbracket \exists_{\beta} x_2 \exists_{\beta} x_3 \varphi_{i_{\alpha}^{\beta} \circ A}(x_2) \wedge \varphi_{i_{\alpha}^{\beta} \circ B}(x_3) \wedge \varphi_T(x_1) \wedge f_{ext}(x_1) = x_2 \wedge g_{ext}(x_1) = x_3 \wedge x_4 = (x_2, x_3) \rrbracket_{\beta, \beta+2}$ der charakteristische Morphismus von $(i_T, (-, -)_{i_{\alpha}^{\beta} \circ A, i_{\alpha}^{\beta} \circ B}) \circ (Id, h)$. Damit ist dann wieder nach Lemma 4.9 $\llbracket \exists_{\beta+2} x_4 \exists_{\beta} x_1 \exists_{\beta} x_2 \exists_{\beta} x_3 \varphi_{i_{\alpha}^{\beta} \circ A}(x_2) \wedge \varphi_{i_{\alpha}^{\beta} \circ B}(x_3) \wedge \varphi_T(x_1) \wedge f_{ext}(x_1) = x_2 \wedge g_{ext}(x_1) = x_3 \wedge x_4 = (x_2, x_3) \wedge x_5 = (x_1, x_4) \rrbracket_{\beta+4}$ der charakteristische Morphismus von $(-, -)_{i_{\alpha}^{\beta+2} \circ T, i_{\alpha}^{\beta} \circ A \times i_{\alpha}^{\beta} \circ B} \circ (Id, h)$, dem Graphen von h . Damit liegt der Graph von h in \mathcal{M} , da er durch eine Σ_0 -Formel beschrieben werden kann. Wir haben also folgendes gezeigt:

SATZ 4.16. $V_{\mathcal{M}}$ hat endliche Produkte.

Wir wenden uns nun dem nächsten Limes in \mathcal{M} : dem terminalen Objekt. Wir nehmen des weiteren an, dass $Id : 1_{\mathcal{E}} \rightarrow 1_{\mathcal{E}}$ in $V_{\mathcal{M}}$ liegt, wobei $1_{\mathcal{E}}$ das terminale Objekt in \mathcal{E} ist. Es wird nun bewiesen, dass $Id : 1 \rightarrow 1$ auch das terminale Objekt in $V_{\mathcal{M}}$. Sei dafür $i_A : A \hookrightarrow V_{\alpha}$ ein Unterobjekt, das in \mathcal{M} liegt. Dann gibt es einen eindeutigen Morphismus $!_A : A \rightarrow 1$ in \mathcal{E} . Wir werden nun zeigen, dass dieser Morphismus in \mathcal{M} liegt.

(3) Das folgende Diagramm ist ein Pullback-Quadrat

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\quad} & 1 \\
 \downarrow (Id, !) & & \downarrow \mathbf{true} \\
 A \times 1 & & \downarrow \\
 \downarrow i_A \times i_1^{\alpha} & & \downarrow \\
 V_{\alpha} \times V_{\alpha} \times V_{\alpha+2} & \xrightarrow{g} & \Omega
 \end{array}$$

wobei $g = \llbracket \varphi_A(x_1) \wedge \varphi_{i_1^{\alpha} \circ 1}(x_2) \rrbracket_{\alpha, \alpha}$.

Beweis: Die Kommutativität folgt direkt aus der Definition φ_A und $\varphi_{i_1^{\alpha} \circ 1}$. Sei also ein Morphismus $f = (f_1, f_2) : D \rightarrow V_{\alpha} \times V_{\alpha}$ mit $g \circ f = \mathbf{true}_D$ gegeben. Da $\llbracket \varphi_A(x_1) \rrbracket_{\alpha} \circ f_1 = \mathbf{true}_D$, gibt es genau einen Morphismus $g_1 : D \rightarrow A$, so dass $i_A \circ g_1 = f_1$. Ausserdem impliziert $\llbracket \varphi_{i_1^{\alpha} \circ 1} \rrbracket_{\alpha} \circ f_2 = \mathbf{true}_D$, dass genau ein Morphismus $g_2 : D \rightarrow 1$ mit $f_2 = i_1^{\alpha} \circ g_2$ existiert. Da natürlich $g_2 = !_D$ sein muss, gilt $!_A \circ g_1 = g_2$. Insgesamt erhalten wir also

$$\begin{aligned}
 (i_A \times i_1^{\alpha}) \circ (Id, !_A) \circ g_1 &= (i_A \times i_1^{\alpha}) \circ (g_1, !_A \circ g_1) \\
 &= (i_A \times i_1^{\alpha}) \circ (g_1, g_2) \\
 &= (f_1, f_2) \\
 &= f.
 \end{aligned}$$

Damit ist das obige Diagramm ein Pullback-Quadrat.

□(3)

Aus Lemma 4.9 erhalten wir, dass $(-, -) \circ (i_A \times i_1^{\alpha}) \circ (Id, !_A)$ das Unterobjekt ist, dessen charakteristischer Morphismus $\llbracket \exists_{\alpha} x_1 \exists_{\alpha} x_2 \varphi_A(x_1) \wedge \varphi_{i_1^{\alpha} \circ 1}(x_2) \wedge \varphi_{A \times 1}(x_3) \wedge x_3 = (x_1, x_2) \rrbracket_{\alpha+2}$ ist. Da dies nach der Σ_0 -Abgeschlossenheit in \mathcal{M} liegt und gerade der Graph von $!_A$ ist, ist $!_A$ also ein Morphismus in $V_{\mathcal{M}}$ von i_A nach Id_1 . Damit ist es auch sicher der einzige solche und wir erhalten:

SATZ 4.17. $V_{\mathcal{M}}$ hat ein terminales Objekt.

Um zu zeigen, dass $V_{\mathcal{M}}$ alle endliche Limiten enthält, bleibt also zu zeigen, dass die Kategorie auch Equalizer besitzt. Seien dafür zwei Unterobjekte $i_A : A \hookrightarrow V_\alpha$, $i_B : B \hookrightarrow V_\alpha$ und zwei Morphismen $f, g : A \rightarrow B$ gegeben. Ferner sei $e : E \hookrightarrow A$ der Equalizer von f und g in \mathcal{E} .

(4) Das folgende Diagramm ist ein Pullback-Quadrat:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ \downarrow e & & \downarrow \mathbf{true} \\ A & & \Omega \\ \downarrow i_A & & \\ V_\alpha & \xrightarrow{\llbracket \varphi_A(x) \wedge f_{ext}(x) = g_{ext}(x) \rrbracket_\alpha} & \end{array}$$

Beweis: Zuerst zeigen wir, dass das obige Diagramm kommutiert. Es gilt nach Definition von $\llbracket \varphi_A \rrbracket_\alpha$, dass

$$\llbracket \varphi_A \rrbracket_\alpha \circ i_A \circ e = \mathbf{true}_A \circ e = \mathbf{true}_E.$$

Da $f \circ e = g \circ e$, gilt nach der Definition einer Erweiterung eines Morphismus, dass

$$\begin{aligned} \llbracket f_{ext}(x) = g_{ext}(x) \rrbracket_\alpha \circ i_A \circ e &=_{V_\alpha} \circ (f_{ext}(x) \circ i_A \circ e, g_{ext}(x) \circ i_A \circ e) \\ &=_{V_\alpha} \circ (i_B \circ f \circ e, i_B \circ g \circ e) \\ &= \mathbf{true}_E. \end{aligned}$$

Also kommutiert das obige Diagramm. Sei nun ein Morphismus $h : D \rightarrow V_\alpha$ mit $\llbracket \varphi_A(x) \wedge f_{ext}(x) = g_{ext}(x) \rrbracket_\alpha \circ h = \mathbf{true}_D$ gegeben. Wegen $\llbracket \varphi_A(x) \rrbracket_\alpha \circ h = \mathbf{true}_D$ gibt es genau einen Morphismus $h' : D \rightarrow A$ mit $i_A \circ h' = h$. Ferner gilt $\llbracket f_{ext}(x) = g_{ext}(x) \rrbracket_\alpha \circ h = \mathbf{true}_D$ und daher auch $f_{ext} \circ h = g_{ext} \circ h$. Aus dem vorherigen folgt dann $f_{ext} \circ i_A \circ h' = g_{ext} \circ i_A \circ h'$. Da aber $f_{ext} \circ i_A = i_B \circ f$, erhalten wir

$$i_B \circ f \circ h' = i_B \circ g \circ h'.$$

Weil i_B ein Monomorphismus ist, haben wir $f \circ h' = g \circ h'$. Aber nach Definition ist e der Equalizer von f und g . Daher gibt es genau einen Morphismus $h'' : D \rightarrow E$ mit $e \circ h'' = h'$. Also haben wir insgesamt einen Morphismus h'' mit $i_A \circ e \circ h'' = h$. Daher ist also das obige Diagramm ein Pullback-Quadrat.

□(4)

Nach (4), Lemma 4.8 und der Σ_0 -Abgeschlossenheit von \mathcal{M} , liegt $i_A \circ e : E \rightarrow V_\alpha$ in \mathcal{M} . Es bleibt also noch zu zeigen, dass e ebenfalls ein Morphismus in $V_{\mathcal{M}}$ ist und dass er zusammen mit $i_A \circ e$ die universelle Eigenschaft des Equalizers besitzt. Dass $e : E \hookrightarrow A$ in \mathcal{M} liegt, ist leicht zu zeigen: der Graph von e ist $(-, -)_{E,A} \circ (Id, e)$. Diese ist aber gerade gleich $(-, -)_{E,E} \circ (Id, Id)$, also gleich dem Graph der Identität auf E . Dieser liegt aber in \mathcal{M} , da $V_{\mathcal{M}}$ eine Kategorie ist.

LEMMA 4.18. Seien $i_A : A \hookrightarrow V_\alpha$, $i_B : B \hookrightarrow V_\alpha$, $i_C : C \hookrightarrow V_\alpha$ drei Unterobjekte und $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ und $h : A \rightarrow C$ drei Morphismen mit $g \circ f = h$ und g sei ein Monomorphismus, dann ist der Graph von f definiert durch

$$\exists_\alpha x \exists_\alpha y \varphi_A(x) \wedge \varphi_B(y) \wedge \varphi_{A \times B}(z) \wedge h_{ext}(x) = g_{ext}(y) \wedge z = (x, y)$$

Beweis: Sei $m : N \hookrightarrow A \times B$ der Equalizer von $h \circ \pi_A$ und $g \circ \pi_B$. Nach Lemma 4.8(1) ist dann $\llbracket \varphi_A(x_1) \wedge \varphi_B(x_2) \wedge h_{ext}(x_1) = g_{ext}(x_2) \rrbracket_{\alpha, \alpha}$ der charakteristische Morphismus von $(i_A \times i_B) \circ m$. Nach Lemma 4.9 ist dann das Unterobjekt, dessen charakteristische Morphismus $\llbracket \exists_{\alpha} x_1 \exists_{\alpha} x_2 \varphi_A(x_1) \wedge \varphi_B(x_2) \wedge \varphi_{A \times B}(x_3) \wedge h_{ext}(x_1) = g_{ext}(x_2) \wedge x_3 = (x_1, x_2) \rrbracket_{\alpha+2}$ ist, gerade $(-, -)_{A, B} \circ m$.

(5) Der Equalizer von $h \circ \pi_A$ und $g \circ \pi_B$ ist $(Id, f) : A \hookrightarrow A \times B$.

Beweis: Zuerst bemerken wir, dass nach Voraussetzung gilt, dass $(h, g) \circ (Id, f) = (h, h)$. Sei nun $k = (k_1, k_2) : D \rightarrow A \times B$ ein Morphismus mit $h \circ k_1 = g \circ k_2$. Dann gilt $g \circ f \circ k_1 = g \circ k_2$. Da g aber ein Monomorphismus ist, erhalten wir $f \circ k_1 = k_2$. Also gilt auch $(Id, f) \circ k_1 = (k_1, k_2)$. Weiterhin ist k_1 offensichtlich der einzige Morphismus mit dieser Eigenschaft. Daher ist (Id, f) der gesuchte Equalizer.

□(5)

Also haben wir nach (5), dass der Graph von f , $(-, -)_{A, B} \circ (Id, f)$, das zu $\llbracket \exists_{\alpha} x_1 \exists_{\alpha} x_2 \varphi_A(x_1) \wedge \varphi_B(x_2) \wedge \varphi_{A \times B}(x_3) \wedge h_{ext}(x_1) = g_{ext}(x_2) \wedge x_3 = (x_1, x_2) \rrbracket_{\alpha+2}$ gehörigen Unterobjekt ist.

□

Aus Lemma 4.18 folgt schnell die universelle Eigenschaft von $i_A \circ e$: Sei $i_T : T \hookrightarrow V_{\alpha}$ ein Unterobjekt, welches in \mathcal{M} liegt. Weiterhin sei $h : T \rightarrow A$ ein Morphismus in $V_{\mathcal{M}}$ mit $f \circ h = g \circ h$. Dann gibt es einen Morphismus $h' : T \rightarrow E$ mit $e \circ h' = h$. Nach vorherigem Lemma 4.18, wissen wir nach Σ_0 -Abgeschlossenheit, dass dieser in \mathcal{M} liegt. Damit gilt:

SATZ 4.19. $V_{\mathcal{M}}$ hat Equalizer.

FOLGERUNG 4.20. Sei \mathcal{M} abgeschlossen unter Produkten und Σ_0 -Formeln und liege $Id : 1 \rightarrow 1$ in \mathcal{M} , dann hat $V_{\mathcal{M}}$ alle endlichen Limiten.

5. Unterobjektclassifizierer und Potenzobjekte in $V_{\mathcal{M}}$

Im vorherigen Abschnitt haben wir gezeigt, dass $V_{\mathcal{M}}$ alle endliche Limiten hat. Nun wende wir uns dem Unterobjektclassifizieren und Potenzobjekt zu. Wir nehmen als erste an, dass nicht nur $Id : 1_{\mathcal{E}} \rightarrow 1_{\mathcal{E}}$, sondern auch $Id : \Omega \rightarrow \Omega$ in $V_{\mathcal{M}}$ liegt. Im folgenden wird nun gezeigt, dass $Id : \Omega \rightarrow \Omega$ auch der Unterobjektclassifizierer von $V_{\mathcal{M}}$.

(1) Das folgende Diagramm ist ein Pullback-Quadrat:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow (Id, \mathbf{true}) & & \downarrow \mathbf{true} \\ 1 \times \Omega & \xrightarrow{g} & \Omega \end{array}$$

wobei $g = \llbracket \varphi_1(x_1) \wedge \varphi_{\Omega}(x_2) \wedge (x_2 \Leftrightarrow \top) \rrbracket_{1,2}$.

Beweis: Da $\llbracket \varphi_1(x_1) \rrbracket_1 = \mathbf{true}_1$ und $\llbracket \varphi_{\Omega}(x_2) \rrbracket_2 = \mathbf{true}_2$ gilt, erhalten wir $g = \llbracket (x_2 \Leftrightarrow \top) \rrbracket_{1,2}$. Nach Definition gilt,

$$\llbracket x_2 \Leftrightarrow \top \rrbracket_2 \circ \mathbf{true} =_{\Omega} \circ (\mathbf{true}, \mathbf{true}) = \mathbf{true}.$$

Damit ist das obige Diagramm kommutativ. Sei nun ein Morphismus $f = (f_1, f_2) : D \rightarrow 1 \times \Omega$ mit $g \circ f = \mathbf{true}_D$ gegeben. Natürlich gilt $f_1 = !_D$. Da $\llbracket (x_2 \Leftrightarrow \top) \rrbracket_2 \circ f_2 = \mathbf{true}_D$ gilt, gilt $f_2 = \mathbf{true}_D$. Insgesamt erhalten wir wie gewünscht

$$(Id, \mathbf{true}) \circ !_D = (!_D, \mathbf{true}_D) = (f_1, f_2).$$

Damit ist also das obige Diagramm ein Pullback-Quadrat.

□(1)

Nach (1) und Lemma 4.9 hat nun gerade das Unterobjekt $(-, -)_{i_1^2 \circ 1, \Omega} \circ (Id, \mathbf{true})$, welches gerade der Graph von \mathbf{true} ist, den Morphismus $\llbracket \exists_2 x_1 \exists_2 x_2 \varphi_{i_1^2 \circ 1}(x_1) \wedge \varphi_\Omega(x_2) \wedge \varphi_{1 \times \Omega}(x_3) \wedge (x_2 \Leftrightarrow \top) \wedge x_3 = (x_1, x_2) \rrbracket_4$ als charakteristischen Morphismus. Nach der Σ_0 -Abgeschlossenheit liegt er also in \mathcal{M} . Seien nun zwei Unterobjekte $i_A : A \hookrightarrow V_\alpha$ und $i_B : B \hookrightarrow V_\alpha$ gegeben. Desweiteren sei ein Monomorphismus $m : A \hookrightarrow B$ gegeben. Dieser Morphismus besitzt in \mathcal{E} natürlich einen charakteristischen Morphismus $l : B \rightarrow \Omega$. Wir wollen nun zeigen, dass dieser auch ein Morphismus in $V_{\mathcal{M}}$ ist.

(2) Es gilt : $l = \llbracket \exists_\alpha x_3 \varphi_A(x_3) \wedge m_{ext}(x_3) = x_1 \rrbracket_\alpha \circ i_B$.

Beweis: Wir zeigen dafür, dass das folgende Diagramm ein Pullback-Quadrat ist:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ \downarrow (m, i_A) & & \downarrow \mathbf{true} \\ B \times V_\alpha & \xrightarrow{\llbracket \varphi_A(x_3) \wedge m_{ext}(x_3) = x_1 \rrbracket_{\alpha, \alpha} \circ (i_B \times Id)} & \Omega \end{array}$$

Dieses Diagramm kommutiert, da nach Definition der Erweiterung eines Morphismus gilt, dass

$$\begin{aligned} \llbracket m_{ext}(x_3) = x_1 \rrbracket_{\alpha, \alpha} \circ (i_B \times Id) \circ (m, i_A) &= \llbracket \varphi_A(x_3) \wedge m_{ext}(x_3) = x_1 \rrbracket_{\alpha, \alpha} \circ (i_B \circ m, m_{ext} \circ i_A) \\ &= \llbracket \varphi_A(x_3) \wedge m_{ext}(x_3) = x_1 \rrbracket_{\alpha, \alpha} \circ (i_B \circ m, i_B \circ m). \end{aligned}$$

Sei nun ein Morphismus $f = (f_1, f_2) : D \rightarrow B \times V_\alpha$ mit $\llbracket \varphi_A(x_3) \wedge m_{ext}(x_3) = x_1 \rrbracket_{\alpha, \alpha} \circ (i_B \times Id) \circ f = \mathbf{true}_D$ gegeben. Nach Lemma 4.7(1) existiert ein Morphismus $g : D \rightarrow A$ mit $(i_B \circ m, i_A) \circ g = (i_B \times Id) \circ f$. Da $i_B \times Id$ ein Monomorphismus ist, folgt dann $(m, i_A) \circ g = f$. Damit ist obiges Diagramm ein Pullback-Quadrat. Nach Lemma 2.49 gilt

$$\begin{aligned} \llbracket \exists_\alpha x_3 \varphi_A(x_3) \wedge m_{ext}(x_3) = x_1 \rrbracket_\alpha \circ i_B &= \exists_\alpha (\llbracket \varphi_A(x_3) \wedge m_{ext}(x_3) = x_1 \rrbracket_{\alpha, \alpha} \circ i_B) \\ &= \exists_\alpha (\llbracket \varphi_A(x_3) \wedge m_{ext}(x_3) = x_1 \rrbracket_{\alpha, \alpha} \circ (i_B \times Id)). \end{aligned}$$

Nach Definition von \exists und dem obigen Pullback-Quadrat ist das zu diesem Morphismus gehörige Unterobjekt gerade das Bild von $\pi_B \circ (m, i_A)$, also das Bild von m . Da m bereits ein Monomorphismus ist, ist es also m selbst. Da aber l nach Definition der charakteristische Morphismus von m ist und der charakteristische Morphismus eindeutig bestimmt ist, gilt die Behauptung.

□(2)

(3) Das folgende Diagramm ist ein Pullback-Quadrat

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ \downarrow (Id, l) & & \downarrow \mathbf{true} \\ B \times \Omega & & \Omega \\ \downarrow i_B \times Id & & \downarrow \\ V_\alpha \times \Omega & \xrightarrow{g} & \Omega \end{array}$$

wobei $g = \llbracket \varphi_B(x_1) \wedge \varphi_\Omega(x_2) \wedge (\exists_\alpha x_4 \varphi_A(x_4) \wedge m_{ext}(x_4) = x_1) \Leftrightarrow x_2 \rrbracket_{\alpha, 2}$.

Beweis: Diese Diagramm ist kommutativ, da nach (2) gilt

$$\begin{aligned} & \llbracket (\exists_{\alpha} x_3 \varphi_A(x_3) \wedge m_{ext}(x_3) = x_1) \Leftrightarrow x_2 \rrbracket_{\alpha,2} \circ (i_B, l) \\ & = \Omega \circ (\llbracket \exists_{\alpha} x_3 \varphi_A(x_3) \wedge m_{ext}(x_3) = x_1 \rrbracket_{\alpha} \circ i_B, l) \\ & = \mathbf{true}_B. \end{aligned}$$

Sei also ein Morphismus $f = (f_1, f_2) : D \rightarrow V_{\alpha} \times \Omega$ mit $g \circ f = \mathbf{true}_D$ gegeben. Dann gilt zuerst $\llbracket \varphi_B \rrbracket_{\alpha} \circ f_1 = \mathbf{true}_D$ und daher gibt es genau einen Morphismus $h_1 : D \rightarrow B$ mit $i_B \circ h_1 = f_1$. Weiter gilt $\llbracket ((\exists_{\alpha} x_3 \varphi_A(x_3) \wedge m_{ext}(x_3) = x_1) \Leftrightarrow x_2) \rrbracket_{\alpha,2} \circ (f_1, f_2) = \mathbf{true}_D$. Das bedeutet, dass $f_2 = \llbracket \exists_{\alpha} x_3 \varphi_A(x_3) \wedge m_{ext}(x_3) = x_1 \rrbracket_{\alpha} \circ f_1$. Nach (2) folgt, dass $f_2 = l \circ i_B \circ f_1$ und damit $f_2 = l \circ h_1$. Insgesamt erhalten wir also

$$(i_B \times Id) \circ (Id, l) \circ h_1 = (i_B \circ h_1, l \circ h_1) = (f_1, f_2).$$

Damit ist das obige Diagramm ein Pullback-Quadrat.

□(3)

Nach Lemma 4.9 und (3) ist dann der charakteristische Morphismus von $(-, -)_{B, \Omega} \circ (Id, l)$, dem Graphen von l , gerade

$$\llbracket \exists_{\alpha} x_1 \exists_2 x_2 \varphi_B(x_1) \wedge \varphi_{\Omega}(x_2) \wedge \varphi_{B \times \Omega}(x_4) ((\exists_{\alpha} x_3 \varphi_A(x_3) \wedge m_{ext}(x_3) = x_1) \Leftrightarrow x_2) \wedge x_4 = (x_2, x_1) \rrbracket_{\alpha+2}.$$

Damit liegt der Graph von l nach Σ_0 -Abgeschlossenheit in \mathcal{M} . Wir haben also nun gezeigt, dass sowohl \mathbf{true} also auch der charakteristische Morphismus auf \mathcal{E} zu einem Monomorphismus in $V_{\mathcal{M}}$ wieder Morphismen in $V_{\mathcal{M}}$. Wir müssen als nur noch nachweisen, dass sie auch die universelle Eigenschaft eines Pullback haben. Nach dem vorherigen Abschnitt sind aber alle endliche Limiten in $V_{\mathcal{M}}$ gerade die Limiten in \mathcal{E} . Daher bilden die angesprochenen Morphismen in $V_{\mathcal{M}}$ ein Pullback-Quadrat, da sie dies auch in \mathcal{E} tun. Also erhalten wir

SATZ 4.21. $V_{\mathcal{M}}$ hat einen Unterobjektklassifizierer.

Wenden wir uns nun also den Potenzobjekte zu. Sei dazu $i_A : A \hookrightarrow V_{\alpha}$ ein Unterobjekt. Wir können das Potenzobjekt von A in \mathcal{E} , dann mittels $\exists_{i_A} : \Omega^A \hookrightarrow V_{\alpha+1}$ in unsere Hierarchie einbetten.

(4) Das folgende Diagramm ist ein Pullback-Quadrat:

$$\begin{array}{ccc} \Omega^A & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ \downarrow \exists_{i_A} & & \downarrow \mathbf{true} \\ V_{\alpha+1} & \xrightarrow{\llbracket \forall_{\alpha} x(x \in z \Rightarrow \varphi_A(x)) \rrbracket_{\alpha+1}} & \Omega \end{array}$$

Beweis: Beginnen wir wiederum mit der Kommutativität des obigen Diagramm: Nach der Beck-Chevalley-Gleichung aus Lemma 2.43 gilt

$$\begin{aligned} \llbracket \forall_{\alpha} x(x \in z \Rightarrow \varphi_A(x)) \rrbracket_{\alpha+1} \circ \exists_{i_A} &= \forall_{\alpha} (\llbracket x \in z \Rightarrow \varphi_A(x) \rrbracket_{\alpha, \alpha+1}) \circ \exists_{i_A} \\ &= \forall_{\alpha} (\llbracket x \in z \Rightarrow \varphi_A(x) \rrbracket_{\alpha, \alpha+1} \circ (Id \times \exists_{i_A})) \end{aligned}$$

Sei $s : S \hookrightarrow A \times \Omega^A$ das zu ev_A gehörige Unterobjekt. Ferner gilt

$$\begin{aligned} \forall_\alpha (\llbracket x \in z \Rightarrow \varphi_A(x) \rrbracket_{\alpha, \alpha+1}) \circ (Id \times \exists_{i_A}) &= \mathbf{true}_{\alpha+1} \\ \text{gdw. } \llbracket x \in z \Rightarrow \varphi_A(x) \rrbracket_{\alpha, \alpha+1} \circ (Id \times \exists_{i_A}) &= \mathbf{true}_{V_\alpha \times \Omega^A} && \text{nach Lemma 2.42} \\ \text{gdw. } \llbracket x \in z \rrbracket_{\alpha, \alpha+1} \circ (Id \times \exists_{i_A}) &\leq \llbracket \varphi_A(x) \rrbracket_\alpha \circ \pi_{V_\alpha} && \text{nach Lemma 2.32} \\ \text{gdw. } ev_\alpha \circ (Id \times \exists_{i_A}) &\leq \llbracket \varphi_A(x) \rrbracket_\alpha \circ \pi_{V_\alpha} \\ \text{gdw. } e_{i_A} &\leq \llbracket \varphi_A(x) \rrbracket_\alpha \circ \pi_{V_\alpha}. \\ \text{gdw. } \llbracket \varphi_A(x) \rrbracket_\alpha \circ \pi_{V_\alpha} \circ (i_A \times Id) \circ s &= \mathbf{true}_S && \text{nach Satz 2.28.} \end{aligned}$$

Die letzte Bedingung gilt nun aber, da $\llbracket \varphi_A(x) \rrbracket_\alpha$ der charakteristische Morphismus von i_A ist. Damit kommutiert das obige Diagramm. Sei nun ein Morphismus $f : D \rightarrow V_{\alpha+1}$ mit $\llbracket \forall_\alpha x(x \in z \Rightarrow \varphi(x)) \rrbracket_{\alpha+1} \circ f = \mathbf{true}_D$ gegeben. Wir erhalten wieder nach der Beck-Chevalley-Gleichung aus Lemma 2.43 und Lemma 2.42, dass dann folgende Gleichung gilt:

$$\llbracket x \in z \Rightarrow \varphi_A(x) \rrbracket_{\alpha, \alpha+1} \circ (Id \times f) = \mathbf{true}_{V_\alpha \times D}.$$

Weiter nach Lemma 2.32, gilt

$$\llbracket x \in z \rrbracket_{\alpha, \alpha+1} \circ (Id \times f) \leq \llbracket \varphi_A \rrbracket_\alpha \circ \pi_\alpha.$$

Sei nun $\underline{f} := \llbracket x \in z \rrbracket_{\alpha, \alpha+1} \circ (Id \times f)$, dann ist \underline{f} gerade die Transponierte von f und es gilt $\underline{f} \leq \llbracket \varphi_A \rrbracket_\alpha \circ \pi_\alpha$. Ferner sei $m = (m_1, m_2) : T \hookrightarrow V_\alpha \times D$ das zu \underline{f} gehörige Unterobjekt von $V_\alpha \times D$. Nach Satz 2.28 erhalten wir, dass

$$\llbracket \varphi_A \rrbracket_\alpha \circ \pi_\alpha \circ m = \mathbf{true}_{V_\alpha \times D}.$$

Also gibt es genau einen Morphismus $h : T \rightarrow A$, so dass $i_A \circ h = m_1$. Wir erhalten also einen Monomorphismus $(h, m_2) : T \hookrightarrow A \times D$, den dazu gehörigen charakteristischen Morphismus $l : A \times D \rightarrow \Omega$ und dessen Transponierte $\bar{l} : D \rightarrow \Omega^A$. Da $(i_A \times Id) \circ (h, m_2) = m_1$ und f die Transponierte des charakteristischen Morphismus von (m_1, m_2) ist, erhalten wir nach Lemma 2.54, dass $f = \exists_{i_A} \circ \bar{l}$. Damit ist \bar{l} gesuchte Morphismus und das obige Diagramm ein Pullback-Quadrat. \square

Wir müssen nun eine weitere Abgeschlossenheitseigenschaft fordern:

DEFINITION 4.22. Wir sagen eine Unterhierarchie $(M_\alpha)_{\alpha \in O_n}$ ist abgeschlossen unter Exponentiation, falls für jedes $f : A \times B \rightarrow \Omega$ in $V_{\mathcal{M}}$ das Bild der Transponierten von f in \mathcal{M} liegt.

Sei nun unsere betrachte Hierarchie unter Exponentiation abgeschlossen. Ferner sei nun ein Morphismus $f : A \times B \rightarrow \Omega$ in $V_{\mathcal{M}}$ gegeben und $m : I \hookrightarrow \Omega^A$ sei das Bild von \underline{f} . Da unsere Hierarchie nun abgeschlossen unter Exponentiation ist, gibt es ein β , so dass $i_\alpha^\beta \circ \exists_{i_A} \circ m$ liegt in \mathcal{M} . Da \mathcal{E} lokal klein ist, gibt es ein maximales solche β für alle Morphismen $f : A \times B \rightarrow \Omega$ in $V_{\mathcal{M}}$. Sei nun im folgenden α diese Ordinalzahl.

Betrachten wir nun das Pullback-Quadrat

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{p} & M_{\alpha+1} \\ \downarrow m & & \downarrow m_{\alpha+1} \\ \Omega^A & \xrightarrow{\exists_{i_A}} & V_{\alpha+1} \end{array}$$

Nach Lemma 2.29 ist der charakteristische Morphismus von $\exists_{i_A} \circ m : P \hookrightarrow V_{\alpha+1}$ gerade $\llbracket \varphi_{M_{\alpha+1}}(z) \wedge \forall_{\alpha} x (x \in z \Rightarrow \varphi_A(x)) \rrbracket_{\alpha+1}$. Daher definieren wir nun $\Omega_{\mathcal{M}}^A := P$ und

$$i_{\Omega_{\mathcal{M}}^A} := \exists_{i_A} \circ m : \Omega_{\mathcal{M}}^A \hookrightarrow V_{\alpha+1}.$$

Nach Σ_0 -Abgeschlossenheit unserer Hierarchie liegt dieses Unterobjekt in \mathcal{M} . Als nächstes müssen wir die Evaluationsabbildung $ev_A^{\mathcal{M}} : A \times \Omega_{\mathcal{M}}^A \rightarrow \Omega$ definieren. Wir setzen $ev_A^{\mathcal{M}} := ev_A \circ (Id \times m)$, also als den Morphismus, dessen Transponierte m ist. Dann gilt ebenfalls

$$\begin{aligned} ev_{\alpha} \circ (i_A \times i_{\Omega_{\mathcal{M}}^A}) &= ev_{\alpha} \circ (i_A \times \exists_{i_A} \circ m) \\ &= ev_{\alpha} \circ (Id \times \exists_{i_A}) \circ (i_A \times m) \\ &= e_{i_A} \circ (i_A \times Id) \times (Id \times m) \\ &= ev_A \circ (Id \times m) \\ &= ev_A^{\mathcal{M}}. \end{aligned}$$

(5) Das folgende Diagramm ist ein Pullback-Quadrat

$$\begin{array}{ccc} A \times \Omega_{\mathcal{M}}^A & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ \downarrow (i_A \times i_{\Omega_{\mathcal{M}}^A}, ev_A^{\mathcal{M}}) & & \downarrow \mathbf{true} \\ V_{\alpha} \times V_{\alpha+1} \times \Omega & \xrightarrow{\quad g \quad} & \Omega \end{array}$$

wobei $g = \llbracket \varphi_A(x_1) \wedge \varphi_{\Omega_{\mathcal{M}}^A}(x_2) \wedge (x_1 \in x_2) \Leftrightarrow x_3 \rrbracket_{\alpha, \alpha+1, 2}$.

Beweis: Zuerst zeigen wir wieder, dass das Diagramm kommutiert. Nach der obigen Bemerkung gilt nun

$$\begin{aligned} \llbracket (x_1 \in x_2) \Leftrightarrow x_3 \rrbracket_{\alpha, \alpha+1, 2} \circ (i_A \times i_{\Omega_{\mathcal{M}}^A}, ev_A^{\mathcal{M}}) &=_{\Omega} \circ (ev_{\alpha} \circ (i_A \times i_{\Omega_{\mathcal{M}}^A}), ev_A^{\mathcal{M}}) \\ &= \mathbf{true}_{A \times \Omega_{\mathcal{M}}^A}. \end{aligned}$$

Also kommutiert das obige Diagramm. Sei nun $f = (f_1, f_2, f_3) : D \rightarrow V_{\alpha} \times V_{\alpha+1} \times \Omega$ mit $g \circ f = \mathbf{true}_D$ gegeben. Dann gilt $\llbracket \varphi_A \rrbracket_{\alpha} \circ f_1 = \mathbf{true}$ und $\llbracket \varphi_{\Omega_{\mathcal{M}}^A} \rrbracket_{\alpha+1} \circ f_2 = \mathbf{true}_D$. Daher gibt es jeweils genau einen Morphismus $l_1 : D \rightarrow A$ und $l_2 : D \rightarrow \Omega_{\mathcal{M}}^A$ mit $i_A \circ l_1 = f_1$ und $i_{\Omega_{\mathcal{M}}^A} \circ l_2 = f_2$. Desweiteren impliziert $\llbracket (x_1 \in x_2) \Leftrightarrow x_3 \rrbracket_{\alpha, \alpha+1, 2} \circ f = \mathbf{true}_D$, dass $ev_{\alpha} \circ (f_1, f_2) = f_3$. Dann gilt insgesamt

$$\begin{aligned} (i_A \times i_{\Omega_{\mathcal{M}}^A}, ev_A^{\mathcal{M}}) \circ (l_1, l_2) &= (f_1, f_2, ev_A^{\mathcal{M}} \circ (l_1, l_2)) \\ &= (f_1, f_2, ev_{\alpha} \circ (i_A \circ l_1, i_{\Omega_{\mathcal{M}}^A} \circ l_2)) \\ &= (f_1, f_2, ev_{\alpha} \circ (f_1, f_2)) \\ &= (f_1, f_2, f_3). \end{aligned}$$

Damit ist das obige Diagramm wie gewünscht ein Pullback-Quadrat.

□(5)

Damit ist der charakteristische Morphismus von $((-, -)_{A \times \Omega_{\mathcal{M}}^A}, ev_A^{\mathcal{M}})$ gerade $\llbracket \exists_{\alpha+1} x_1 \exists_{\alpha+1} x_2 \varphi_{i_{\alpha+1} \circ A}(x_1) \wedge \varphi_{\Omega_{\mathcal{M}}^A}(x_2) \wedge x_0 = (x_1, x_2) \wedge (x_1 \in x_2) \Leftrightarrow x_3 \rrbracket_{\alpha+3}$. Mit Lemma 4.9 folgt dann wie üblich, dass $ev_A^{\mathcal{M}}$ ein Morphismus in $V_{\mathcal{M}}$ ist.

Sei nun ein Morphismus $f : A \times B \rightarrow \Omega$ in $V_{\mathcal{M}}$ gegeben. Es ist nun also ein Morphismus $h : B \rightarrow \Omega_{\mathcal{M}}^A$ zu konstruieren, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A \times B & & \\ \text{Id} \times h \downarrow & \searrow f & \\ A \times \Omega_{\mathcal{M}}^A & \xrightarrow{\text{ev}_{\mathcal{M}}^A} & \Omega \end{array}$$

kommutiert. Da Ω^A das Potenzobjekt von A in \mathcal{E} ist, haben wir mit der Transponierten \bar{f} von f einen Morphismus \bar{f} von B nach Ω^A . Sei $c : B \rightarrow I$, $n : I \hookrightarrow \Omega^A$ die Bildzerlegung von \bar{f} . Nach Abgeschlossenheit unter Exponentiation und unserer Wahl von α liegt dann $\exists_{i_A} \circ n : I \hookrightarrow V_{\alpha+1}$ in \mathcal{M} . Es gilt dann, dass $\exists_{i_A} \circ n$ durch $m_{\alpha+1}$ faktorisiert: es gibt also $n' : I \hookrightarrow M_{\alpha+1}$ mit $\exists_{i_A} \circ n = m_{\alpha+1} \circ n'$. Nach Pullback-Definition von $\Omega_{\mathcal{M}}^A$ gibt es dann einen Morphismus $n'' : I \rightarrow \Omega_{\mathcal{M}}^A$ mit $n = m \circ n''$. Also gibt es einen Morphismus $h : B \rightarrow \Omega_{\mathcal{M}}^A$ mit $h := n'' \circ c$, so dass $m \circ h = m \circ n'' \circ c = n \circ c = \bar{f}$. Insbesondere gilt dann

$$\begin{aligned} \text{ev}_{\mathcal{M}}^A \circ (\text{Id} \times h) &= \text{ev}_A \circ (\text{Id} \times m) \circ (\text{Id} \times h) \\ &= \text{ev}_A \circ (\text{Id} \times \bar{f}) \\ &= f. \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass h durch die Eigenschaft eindeutig bestimmt ist und dass der Graph von h in \mathcal{M} liegt. Dafür benötigen wir noch folgende Aussage:

- (6) Sei $l : D \rightarrow B$ ein Morphismus, dann ist das folgende Diagramm ein Pullback-Quadrat

$$\begin{array}{ccc} A \times D & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow (\text{Id} \times \text{Id}, \text{Id} \times l) & & \downarrow \mathbf{true} \\ A \times D \times A \times B & \xrightarrow{g} & \Omega \end{array}$$

wobei $g = \llbracket x_3 = (x_1, x_2) \rrbracket_{\alpha, \alpha, \alpha+2} \circ (i_A \times (i_B \circ l) \times i_{A \times B})$.

Beweis: Offensichtlich gilt nach Lemma 2.31 und da $i_{A \times B} := (-, -)_{A, B}$ gerade

$$\begin{aligned} &\llbracket x_3 = (x_1, x_2) \rrbracket_{\alpha, \alpha, \alpha+2} \circ (i_A \times (i_B \circ l) \times i_{A \times B}) \circ (\text{Id} \times \text{Id}, \text{Id} \times l) \\ &= \Omega \circ ((-, -) \circ (i_A \times i_B \circ l), i_{A \times B}) \circ (\text{Id} \times \text{Id}, \text{Id} \times l) \\ &= \Omega \circ ((-, -) \circ (i_A \times i_B \circ l), i_{A \times B} \circ (\text{Id} \times l)) \\ &= \mathbf{true}_{A \times D}. \end{aligned}$$

Damit kommutierte das obige Diagramm. Sei $t = (t_1, t_2, t_3, t_4) : E \rightarrow A \times D \times A \times B$ ein Morphismus mit $g \circ t = \mathbf{true}_E$. Dann gilt gerade

$$i_{A \times B} \circ (t_3, t_4) = (-, -) \circ (i_A \times i_B) \circ (t_1, l \circ t_2).$$

Da nach Definition $i_{A \times B} = (-, -)_{A, B} = (-, -) \circ (i_A \times i_B)$ und da $(-, -)$ ein Monomorphismus ist, gilt dann $t_1 = t_3$ und $t_4 = l \circ t_2$. Damit gilt also

$$(\text{Id} \times \text{Id}, \text{Id} \times l) \circ (t_3, t_4) = (t_1, t_2, t_3, t_4).$$

Damit ist das obige Diagramm ein Pullback-Quadrat.

□(6)

Man beachte nun, dass für eine Erweiterung f_{ext} von f gilt

$$f_{ext} \circ i_{A \times B} = f_{ext} \circ (-, -)_{A \times B} = f.$$

(7) Das folgende Diagramm ist ein Pullback-Quadrat

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ \downarrow (Id, h) & & \downarrow \mathbf{true} \\ B \times \Omega_{\mathcal{M}}^A & & \Omega \\ \downarrow (i_B, i_{\Omega_{\mathcal{M}}^A}) & \xrightarrow{g} & \downarrow \\ V_{\alpha} \times V_{\alpha+1} & \xrightarrow{\quad} & \Omega \end{array}$$

$$\text{wobei } g = \llbracket \varphi_B(x_2) \wedge \varphi_{\Omega_{\mathcal{M}}^A}(x_3) \wedge \forall_{\alpha+2} x_0 \forall_{\alpha} x_1 \varphi_{A \times B}(x_0) \Rightarrow \varphi_A(x_1) \Rightarrow x_0 = (x_1, x_2) \Rightarrow (x_1 \in x_3 \Leftrightarrow f_{ext}(x_0)) \rrbracket_{\alpha, \alpha+1}$$

Beweis: Zuerst haben wir die Kommutativität zu zeigen: Nach (6) ist $\llbracket x_0 = (x_1, x_2) \rrbracket_{\alpha+2, \alpha, \alpha} \circ (i_{A \times B} \times i_A \times i_B)$ gerade der charakteristische Morphismus von $\Delta_{A \times B}$ ist. Nach Lemma 2.32 und Satz 2.28 gilt

$$\llbracket x_0 = (x_1, x_2) \Rightarrow (x_1 \in x_3 \Leftrightarrow f_{ext}(x_0)) \rrbracket_{\alpha+2, \alpha, \alpha, \alpha+1} \circ (i_{A \times B} \times i_A \times (i_B, i_{\Omega_{\mathcal{M}}^A} \circ h)) = \mathbf{true}_{A \times B \times A \times B}$$

genau dann, wenn

$$\llbracket x_1 \in x_3 \Leftrightarrow f_{ext}(x_0) \rrbracket_{\alpha+2, \alpha, \alpha, \alpha+1} \circ (i_{A \times B} \times i_A \times (i_B, i_{\Omega_{\mathcal{M}}^A} \circ h)) \circ \Delta_{A \times B} = \mathbf{true}_{A \times B}.$$

Dies gilt nun genau dann, wenn

$$\llbracket x_1 \in x_3 \Leftrightarrow f_{ext}(x_0) \rrbracket_{\alpha, \alpha, \alpha+1} \circ (i_{A \times B}, i_A \circ \pi_1, i_B \circ \pi_2, i_{\Omega_{\mathcal{M}}^A} \circ h \circ \pi_2) = \mathbf{true}_{A \times B}$$

$$\text{gdw. } =_{\Omega} \circ (ev_{\alpha} \circ (i_A \times i_{\Omega_{\mathcal{M}}^A} \circ h), f_{ext} \circ i_{A \times B}) = \mathbf{true}_{A \times B}$$

$$\text{gdw. } =_{\Omega} \circ (ev_A^{\mathcal{M}} \circ (Id \times h), f) = \mathbf{true}_{A \times B}$$

$$\text{gdw. } =_{\Omega} \circ (f, f) = \mathbf{true}_{A \times B}.$$

Die letzte Gleichung gilt nun nach Lemma 2.31. Nach Lemma 2.43 und nach Lemma 2.42 erhalten wir, dass das obige Diagramm kommutiert. Sei $k = (k_1, k_2) : D \rightarrow V_{\alpha} \times V_{\alpha+1}$ ein Morphismus mit $g \circ h = \mathbf{true}_D$. Dann gibt es $l_1 : D \rightarrow B$ und $l_2 : D \rightarrow \Omega_{\mathcal{M}}^A$ mit $i_B \circ l_1 = k_1$ und $i_{\Omega_{\mathcal{M}}^A} \circ l_2 = k_2$. Dann gilt nach Lemma 2.43, nach Lemma 2.42, dass

$$\llbracket \forall_{\alpha+2} x_0 \forall_{\alpha} x_1 \varphi_{A \times B}(x_0) \Rightarrow \varphi_A(x_1) \Rightarrow x_0 = (x_1, x_2) \Rightarrow (x_1 \in x_3 \Leftrightarrow f_{ext}(x_0)) \rrbracket_{\alpha, \alpha+1} \circ k = \mathbf{true}_D$$

genau dann gilt, wenn

$$\llbracket \varphi_{A \times B}(x_0) \Rightarrow \varphi_A(x_1) \Rightarrow x_0 = (x_1, x_2) \Rightarrow (x_1 \in x_3 \Leftrightarrow f_{ext}(x_0)) \rrbracket_{\alpha+2, \alpha, \alpha, \alpha+1} \circ (Id \times k) = \mathbf{true}_{V_{\alpha+2} \times V_{\alpha} \times D}.$$

Nach Lemma 2.45 gilt dies wiederum genau dann, wenn

$$\llbracket x_0 = (x_1, x_2) \Rightarrow (x_1 \in x_3 \Leftrightarrow f_{ext}(x_0)) \rrbracket_{\alpha+2, \alpha, \alpha, \alpha+1} \circ (i_{A \times B} \times i_A \times k) = \mathbf{true}_{A \times B \times A \times D}.$$

Nach Lemma 2.32 gilt dies genau dann, wenn

$$(5.1) \quad \llbracket x_0 = (x_1, x_2) \rrbracket_{\alpha+2, \alpha, \alpha, \alpha+1} \circ (i_{A \times B} \times i_A \times k) \leq \llbracket (x_1 \in x_3 \Leftrightarrow f_{ext}(x_0)) \rrbracket_{\alpha+2, \alpha, \alpha, \alpha+1} \circ (i_{A \times B} \times i_A \times k).$$

Sei $n = (n_1, n_2, n_3, n_4) : S \hookrightarrow A \times B \times A \times D$ das zu $\xi := \llbracket x_0 = (x_1, x_2) \rrbracket_{\alpha+2, \alpha, \alpha, \alpha+1} \circ (i_{A \times B} \times i_A \times k)$ gehörige Unterobjekt. Da $\xi \circ n = \mathbf{true}_S$ gilt, dann

$$i_{A \times B} \circ (n_1, n_2) = (-, -) \circ (i_A \circ n_3, k_1 \circ n_4).$$

Da ferner $k_1 = i_A \circ l_1$ und $i_{A \times B} = (-, -)_{A, B}$ gilt also

$$(-, -)_{A \times B} \circ (n_1, n_2) = (-, -)_{A, B} \circ (n_3, l_1 \circ n_4).$$

und damit $n_1 = n_3$ und $n_2 = l_1 \circ n_4$, da $(-, -)_{A, B}$ ein Monomorphismus ist. Nach Ungleichung (5.1) und Satz 2.28 gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{true}_S &= \llbracket (x_1 \in x_3 \Leftrightarrow f_{ext}(x_0)) \rrbracket_{\alpha+2, \alpha, \alpha, \alpha+1} \circ (i_{A \times B} \times i_A \times k_2) \circ n \\ &=_{\Omega} \circ (ev_{\alpha} \circ (Id \times k_2) \circ (i_A \circ n_3, n_4), f_{ext} \circ i_{A \times B} \circ (n_1, n_2)) \end{aligned}$$

Damit gilt nach Lemma 2.31, dass

$$ev_{\alpha} \circ (Id \times k_2) \circ (i_A \circ n_3, n_4) = f_{ext} \circ i_{A \times B} \circ (n_1, n_2).$$

und

$$ev_{\alpha} \circ (i_A \times i_{\Omega_{\mathcal{M}}^A}) \circ (Id \times l_2) \circ (n_3, n_4) = f_{ext} \circ i_{A \times B} \circ (n_1, n_2).$$

$$ev_A \circ (Id \times m \circ l_2) \circ (n_3, n_4) = f \circ (n_3, l_1 \circ n_4)$$

Nach (6) ist nun aber (n_3, n_4) gerade $Id_{A \times D}$. Damit gilt also $ev_A \circ (Id \times m \circ l_2) = f \circ (Id \times l_1)$. Damit ist $m \circ l_2$ die Transponierte von $f \circ (Id \times l_1)$. Nach Natürlichkeit und Eindeutigkeit der Transponierten gilt damit $m \circ l_2 = \bar{f} \circ l_1$. Insgesamt gilt also

$$\begin{aligned} (i_B \times i_{\Omega_{\mathcal{M}}^A}) \circ (Id, h) \circ l_1 &= (k_1, i_{\Omega_{\mathcal{M}}^A} \circ h \circ l_1) \\ &= (k_1, \exists_{i_A} \circ m \circ h \circ l_1) \\ &= (k_1, \exists_{i_A} \circ \bar{f} \circ l_1) \\ &= (k_1, \exists_{i_A} \circ m \circ l_2) \\ &= (k_1, i_{\Omega_{\mathcal{M}}^A} \circ l_2) \\ &= (k_1, k_2). \end{aligned}$$

Damit ist das obige Diagramm ein Pullback-Quadrat.

□(7)

Da $\llbracket f_{ext}(x_0) = \top \rrbracket_{\alpha+2} = \llbracket f_{ext}(x_0) \rrbracket_{\alpha+2}$ erhalten wir nach Σ_0 -Abgeschlossenheit und (7), dass h ein Morphismus in $V_{\mathcal{M}}$ ist. Angenommen, dass es einen weiteren Morphismus $l : B \rightarrow \Omega_{\mathcal{M}}^A$ mit $ev_A^{\mathcal{M}} \circ (Id \times l) = f$ gegeben. Nach Gleichung (4.1) und den Definitionen von \exists_{i_A} und $i_{\Omega_{\mathcal{M}}^A}$ gilt nun

$$\begin{aligned} ev_A \circ (Id \times m \circ l) &= e_{i_A} \circ (i_A \times Id) \circ (Id \times m \circ l) \\ &= ev_{\alpha} \circ (Id \times \exists_{i_A}) \circ (i_A \times Id) \circ (Id \times m \circ l) \\ &= ev_{\alpha} \circ (i_A \times \exists_{i_A}) \circ (Id \times m \circ l) \\ &= ev_{\alpha} \circ (i_A \times \exists_{i_A} \circ m \circ l) \\ &= ev_{\alpha} \circ (i_A \times i_{\Omega_{\mathcal{M}}^A} \circ l) \\ &= ev_{\alpha} \circ (i_A \times i_{\Omega_{\mathcal{M}}^A}) \circ (Id \times l) \\ &= ev_A^{\mathcal{M}} \circ (Id \times l) = f. \end{aligned}$$

Nach der Eindeutigkeit der Transponierten in \mathcal{E} , erhalten wir also $\bar{f} = m \circ l$. Da aber auch $m \circ h = \bar{f}$ gilt, gilt $h = l$, da m ein Monomorphismus ist.

SATZ 4.23. $V_{\mathcal{M}}$ hat Potenzobjekte.

Damit haben wir insgesamt gezeigt:

THEOREM 4.24. *Sei \mathcal{M} abgeschlossen unter Produkten, Σ_0 -Formeln und Exponentiation und liege $Id : 1 \rightarrow 1$ und $Id : \Omega \rightarrow \Omega$ in \mathcal{M} , dann ist $V_{\mathcal{M}}$ ein Topos.*

Ausblick

Wir haben also nun bewiesen, dass wir für eine Unterhierarchie der von-Neumann-Hierarchie einen Topos $V_{\mathcal{M}}$ erhalten. Es bleiben also noch zwei Fragen zu klären: Erstens, ist dieser Topos auch vollständig und lokal klein? Und zweitens, wie ist der Zusammenhang zwischen der Logik in unserem Ausgangstopos \mathcal{E} und der Logik in unserem Inneren Topos $V_{\mathcal{M}}$?

Nach der Definition eines Morphismus in $V_{\mathcal{M}}$ ist $V_{\mathcal{M}}$ offensichtlich lokal klein, da \mathcal{E} lokal klein ist. Dagegen ist die Vollständigkeit problematischer. Nach Theorem 2.22 würde es reichen, zu zeigen, dass $V_{\mathcal{M}}$ alle Limiten besitzt. Wir wissen bereits, dass nach Folgerung 4.20 $V_{\mathcal{M}}$ alle endlichen Limiten besitzt. Da müssten wir, um die Vollständigkeit zu zeigen, nur beweisen, dass $V_{\mathcal{M}}$ alle Produkte enthält. Die Idee hier wäre, wie in Kapitel 2 Abschnitt 7 einen Morphismus zu konstruieren, der die Produkte in die von-Neumann-Hierarchie einbettet. Die Konstruktion für Produkte aus zwei Objekte haben wir dort schon beschrieben. Wenn wir nun eine solche Einbettung für Produkte beliebig vieler Objekte konstruieren wollen, bietet es sich an, dies per Ordinalzahlinduktion zu beweisen. Der Nachfolgerschritt folgt offensichtlich direkt aus dem Fall von zwei Objekten. Problematisch wird nun der Limeschritt. Sei also λ eine externe Limesordinalzahl und A_α ein Objekt in \mathcal{E} für $\alpha < \lambda$. Im Fall der klassischen Mengenlehre könnten wir hier nun ein Element dieses Produktes als Abbildung $f : \lambda \rightarrow \bigcup_{\alpha < \lambda} A_i$ auffassen. Für diese Abbildung f müsste ferner gelten $f(\alpha) \in A_\alpha$ für alle $\alpha \in \lambda$. Diese definierenden Formeln müssten wir nun nutzen, um das Produkt der A_α 's in unserem Topos zu konstruieren. Diese Bedingungen stellen uns jedoch vor mehrere Probleme. Zum einen müssten wir intern Ordinalzahlobjekte konstruieren. Im Fall von λ könnte dies zum Beispiel durch disjunkte Vereinigung λ -vieler Kopien des terminalen Objektes 1 und den Einbettungen i_1^λ geschehen. Mit Hilfe der Definition von V_λ als Colimes erhielten wir so eine Einbettung von dieser disjunkten Vereinigung nach V_λ . So könnte diese disjunkte Vereinigung in die von-Neumann-Hierarchie eingebettet werden, und wir erhielten ein Unterobjekt, welches wir als λ interpretieren könnten. Angenommen, wir können nun Ordinalzahlobjekte in unserem Topos konstruieren, dann müssten wir jedoch ferner zeigen, dass intern ebenfalls eine Abbildung $\alpha \mapsto A_\alpha$ existiert. Dies ist jedoch sicherlich nicht möglich, da dies ja schon im Fall der Inneren Modelle nicht möglich ist. Es ist also wohl so, dass wir nicht Produkte beliebiger Objekte und damit beliebige Limiten konstruieren können. Der Beweis, dass die Inneren Topoi vollständig sind, kann so nicht funktionieren. Dies verwundert jedoch kaum, da auch nicht alle Inneren Modelle unter beliebigen Limiten abgeschlossen sind.

Möglich könnte jedoch die Konstruktion gewisser einfacher Limiten von bestimmten Objekten sein. Zum Beispiel könnte man vielleicht beweisen, dass ein

Innerer Topos genügend Limiten und Colimiten besitzt, um eine Konstruktion der von-Neumann-Hierarchie und Interpretation unbeschränkter Quantoren durchzuführen. In den Fällen dieser Limiten ließe sich vielleicht eine Abbildung $\alpha \mapsto A_\alpha$ konstruieren. Betrachten wir zum Beispiel in der Konstruktion der von-Neumann-Hierarchie die Konstruktion im Limesfall. Wir müssen dann die Abbildung $\alpha \mapsto V_\alpha^{\mathcal{M}}$ definieren. Dafür bräuchte man aber, wie bereits erwähnt, so etwas wie Ordinalzahlinduktion intern in unserem Inneren Topos. Es ist vorstellbar, dass diese Konstruktion funktionieren könnte, aber wohl nur mit einem noch höheren technischen Aufwand als schon im Fall des Beweises, dass $V_{\mathcal{M}}$ ein Topos ist. Im Fall der Konstruktion unendlicher Disjunktionen bzw. Konjunktionen der Form $\bigwedge_{\alpha \in On} \llbracket \forall_\alpha x \varphi \rrbracket_{\bar{\gamma}}$ bzw. $\bigvee_{\alpha \in On} \llbracket \forall_\alpha x \varphi \rrbracket_{\bar{\gamma}}$ gilt ähnliches. Hier bräuchten wir intern eine Abbildung $\alpha \mapsto A_\alpha$, wobei A_α das zu $\llbracket \forall_\alpha x \varphi \rrbracket_{\bar{\gamma}}$ gehörige Unterobjekt ist. Hier müssen wir also sogar intern Objekte durch Formeln definieren. Daher müssten wir wohl für den Beweis dieser Tatsache die Konstruktion von Formeln internalisieren. Insbesondere hier würde der technische Aufwand immens groß werden.

Noch nicht beantwortet wurde die Frage nach dem Zusammenhang zwischen der Logik im Ausgangstopos und im Inneren Topos. Für den Fall der Inneren Modell in der Mengenlehre gilt hier Absolutheit bezüglich Σ_0 -Formeln. Sei nun angenommen, dass $V_{\mathcal{M}}$ tatsächlich genug Limiten und Colimiten besitzt, um eine von-Neumann-Hierarchie zu konstruieren und unbeschränkte Quantoren zu interpretieren. Sei dann $(V_\alpha^{\mathcal{M}})_{\alpha \in On}$ die von-Neumann-Hierarchie in $V_{\mathcal{M}}$. Sei ferner für ein $\alpha \in On$ $a_\alpha : A_\alpha \hookrightarrow V_{\mu(\alpha)}$ ein Repräsentant von $V_\alpha^{\mathcal{M}}$. Sei $\mu(\alpha)$ so gross gewählt, dass $\mu(\alpha)$ Nachfolgerordinalzahl ist und $\Omega_{\mathcal{M}}^{A_\alpha} \hookrightarrow V_{\mu(\alpha)+1}$. Wie verhalten sich nun die Interpretation des Allquantor $\forall_{A_\alpha}^{\mathcal{M}}$ in $V_{\mathcal{M}}$ und \forall_{A_α} in \mathcal{E} zueinander? Sei dafür $f : A_\alpha \times B \rightarrow \Omega$ ein Morphismus in $V_{\mathcal{M}}$ und sei ferner $\bar{f} : B \rightarrow \Omega^{A_\alpha}$ die Transponierte von f in \mathcal{E} und $\bar{f}^{\mathcal{M}} : B \rightarrow \Omega_{\mathcal{M}}^{A_\alpha}$ die Transponierte von f in $V_{\mathcal{M}}$. Nun gilt aber nach Konstruktion, dass $m \circ \bar{f}^{\mathcal{M}} = \bar{f}$, wobei $m : \Omega_{\mathcal{M}}^{A_\alpha} \hookrightarrow \Omega^{A_\alpha}$. Gleiches gilt auch für die Transponierten von $\mathbf{true}_{A_\alpha \times B}$: $\overline{\mathbf{true}_{A_\alpha \times B}}^{\mathcal{M}} = m \circ \overline{\mathbf{true}_{A_\alpha \times B}}^{\mathcal{M}}$. Sei nun $e : E \rightarrow B$ der Equalizer von \bar{f} und $\overline{\mathbf{true}_{A_\alpha \times B}}^{\mathcal{M}}$.

(1) $e : E \rightarrow B$ ist Equalizer von $\bar{f}^{\mathcal{M}}$ und $\overline{\mathbf{true}_{A_\alpha}}^{\mathcal{M}}$ in $V_{\mathcal{M}}$.

Beweis: Nach Definition von e gilt, dass $\bar{f} \circ e = \overline{\mathbf{true}_{A_\alpha}}^{\mathcal{M}} \circ e$. Also gilt auch

$$m \circ \bar{f}^{\mathcal{M}} \circ e = m \circ \overline{\mathbf{true}_{A_\alpha \times B}}^{\mathcal{M}} \circ e.$$

Da m ein Monomorphismus ist, gilt also auch $\bar{f}^{\mathcal{M}} \circ e = \overline{\mathbf{true}_{A_\alpha \times B}}^{\mathcal{M}} \circ e$. Sei nun also ein Morphismus $h : D \rightarrow B$ mit $\bar{f}^{\mathcal{M}} \circ h = \overline{\mathbf{true}_{A_\alpha \times B}}^{\mathcal{M}} \circ h$ gegeben. Dann gilt auch $\bar{f} \circ h = \overline{\mathbf{true}_{A_\alpha \times B}}^{\mathcal{M}} \circ h$ und wir halten einen eindeutigen Morphismus $h' : D \rightarrow E$ mit $e \circ h' = h$. Also ist e auch dieser Equalizer. Da e der Equalizer von $\bar{f}^{\mathcal{M}}$ und $\overline{\mathbf{true}_{A_\alpha \times B}}^{\mathcal{M}}$ in \mathcal{E} ist, ist er es auch in $V_{\mathcal{M}}$.

□(1)

Da wir auch gesehen haben, dass $\mathbf{true}_{A \times B}$ gerade $\mathbf{true}_{A \times B}^{\mathcal{M}}$ repräsentiert, erhalten wir aus (1), dass die Interpretation des Allquantor in $V_{\mathcal{M}}$ mit der aus \mathcal{E} übereinstimmt. Wir haben also gezeigt, dass die Interpretation des Allquantors absolut ist. Ziel wäre es nun, folgendes Theorem zu beweisen:

THEOREM 5.1. *Sei φ eine $\in -\Sigma_0$ -Formel, dann gilt*

$$\llbracket \varphi(\vec{x}) \rrbracket_{\vec{\alpha}}^M = \llbracket \varphi \rrbracket_{\mu(\vec{\alpha})} \circ a_{\vec{\alpha}}.$$

Dies wird nicht ganz gelingen, da wir nicht genau wissen, wie sich die Limesstufen der von-Neumann-Hierarchie in $V_{\mathcal{M}}$ zu denen in \mathcal{E} verhalten. Ferner ist überhaupt nicht klar, wie sich die M_α 's aus der Hierarchie \mathcal{M} zu den A_α 's verhalten. Sei $(k_\alpha^\beta)_{\alpha, \beta \in On}$ die Einbettungen der von-Neumann-Hierarchie in $V_{\mathcal{M}}$. Wir nehmen nun an, dass folgende Gleichungen für alle $\alpha, \beta \in On$ gelten:

$$(0.2) \quad i_{\mu(\alpha)}^{\mu(\beta)} \circ a_\alpha = a_\beta \circ k_\alpha^\beta.$$

und

$$(0.3) \quad \llbracket x \in y \rrbracket_{\alpha, \alpha} \circ (Id \times a_\alpha) \leq g_\alpha \circ \pi_1,$$

wobei $g_\alpha : V_{\mu(\alpha)} \rightarrow \Omega$ der charakteristische Morphismus von a_α ist.

Gleichung (0.2) verlangt also gerade, dass sich die Einbettungen wohl verhalten. Dagegen bedeutet Gleichung (0.3) gerade, dass a_α auch wirklich transitiv ist. Hiermit können wir nun Theorem 5.1 beweisen. Falls sich die Limesstufen in $V_{\mathcal{M}}$ verträglich mit denen in \mathcal{E} verhalten sollten, dann sollte es möglich sein, dass Gleichung (0.3) mit Hilfe der Eigenschaft (ii) einer Unterhierarchie beweisbar ist.

Beweis: Wir beweisen dies durch Induktion über den Aufbau von Σ_0 -Formeln. Sei zuerst $\varphi := x_1 = x_2$.

(2) Das folgende Diagramm ist ein Pullback-Quadrat:

$$\begin{array}{ccc} A_\alpha & \longrightarrow & 1 \\ \Delta \downarrow & & \downarrow \mathbf{true} \\ A_\alpha \times A_\alpha & \xrightarrow{=_{\mu(\alpha)} \circ (a_\alpha, a_\alpha)} & \Omega \end{array}$$

Beweis: Nach Lemma 2.31 kommutiert das Diagramm offensichtlich. Sei nun ein Morphismus $f = (f_1, f_2) : D \rightarrow M_\alpha \times M_\alpha$ gegeben mit $=_{\mu(\alpha)} \circ (a_\alpha, a_\alpha) \circ f = \mathbf{true}_D$. Dann gilt $a_\alpha \circ f_1 = a_\alpha \circ f_2$. Da a_α ein Monomorphismus ist, erhalten wir $f_1 = f_2$ und so faktorisiert f also durch Δ . Daher ist das obige Diagramm ein Pullback-Quadrat.

□(2)

Da dies dann auch ein Pullback in $V_{\mathcal{M}}$ ist, erhalten wir, dass $\llbracket x_1 = x_2 \rrbracket_{\alpha, \alpha} = \llbracket x_1 = x_2 \rrbracket_{\mu(\alpha), \mu(\alpha)} \circ (a_\alpha \times a_\alpha)$. Für $\llbracket x_1 = x_2 \rrbracket_{\alpha, \beta}$ erhalten wir die Behauptung aus Gleichung (0.2) und Lemma 3.7.

Sei nun $\varphi := x_1 \in x_2$. Sei nun $m : \Omega_{\mathcal{M}}^{A_\alpha} \hookrightarrow \Omega^{A_\alpha}$. Dann gilt nach Wahl der $\mu(\alpha)$'s, dass

$$\begin{aligned} \llbracket x \in y \rrbracket_{\mu(\alpha), \mu(\alpha+1)} \circ (a_\alpha \times a_{\alpha+1}) &= ev_{\mu(\alpha+1)-1} \circ (i_{\mu(\alpha)}^{\mu(\alpha+1)-1} \circ a_\alpha \times a_{\alpha+1}) \\ &= ev_{\mu(\alpha+1)-1} \circ (i_{\mu(\alpha)}^{\mu(\alpha+1)-1} \circ a_\alpha \times i_{\mu(\alpha)+1}^{\mu(\alpha+1)} \circ \exists_{a_\alpha} \circ m) \\ &= ev_{\mu(\alpha)} \circ (a_\alpha \times \exists_{a_\alpha} \circ m) \\ &= ev_{A_\alpha} \circ (Id \times m) \\ &= ev_\alpha^M = \llbracket x \in y \rrbracket_{\alpha, \alpha+1}^M. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir nach Gleichung (0.2), dass

$$\begin{aligned}
\llbracket x \in y \rrbracket_{\mu(\alpha), \mu(\alpha)} \circ (a_\alpha \times a_\alpha) &= \llbracket x \in y \rrbracket_{\mu(\alpha), \mu(\alpha+1)} \circ (a_\alpha \times i_{\mu(\alpha)}^{\mu(\alpha+1)} \circ a_\alpha) \\
&= \llbracket x \in y \rrbracket_{\mu(\alpha), \mu(\alpha+1)} \circ (a_\alpha \times a_{\alpha+1} \circ k_\alpha^{\alpha+1}) \\
&= \llbracket x \in y \rrbracket_{\alpha, \alpha+1}^{\mathcal{M}} \circ (Id \times k_\alpha^{\alpha+1}) \\
&= \llbracket x \in y \rrbracket_{\alpha, \alpha}^{\mathcal{M}}.
\end{aligned}$$

Für $\llbracket x_1 \in x_2 \rrbracket_{\alpha, \beta}$ erhalten wir die Behauptung aus Gleichung (0.2) und Lemma 3.7. Nach Annahme, dass $M_2 = \Omega$, und dem Wissen, dass alle endliche Limiten und Colimiten in $V_{\mathcal{M}}$ gerade diejenigen aus \mathcal{E} sind, erhalten wir, dass \vee, \wedge und \Rightarrow aus \mathcal{E} gerade auch die entsprechenden logischen Operation in $V_{\mathcal{M}}$ sind.

Sei nun ψ eine Σ_0 -Formel und $\varphi := \forall x(x \in y \Rightarrow \psi(x, y, \vec{z}))$. Es gelte nun in $V_{\mathcal{M}}$, dass

$$\llbracket \psi(x, y, \vec{z}) \rrbracket_{\mu(\beta), \mu(\alpha), \mu(\vec{\gamma})} \circ (a_\beta \times a_\alpha \times a_{\vec{\gamma}}) = \llbracket \psi(x, y, \vec{z}) \rrbracket_{\beta, \alpha, \vec{\gamma}}^M.$$

Nach Folgerung 2.45 zusammen mit (0.3), Lemma 2.43 und Folgerung 3.15(i) gilt dann

$$\begin{aligned}
&\llbracket \forall x x \in y \Rightarrow \psi(x, y, \vec{z}) \rrbracket_{\alpha, \vec{\gamma}}^M \\
&= \llbracket \forall_\alpha x x \in y \Rightarrow \psi(x, y, \vec{z}) \rrbracket_{\alpha, \vec{\gamma}}^M \\
&= \forall_\alpha^M (\llbracket x \in y \Rightarrow \psi(x, y, \vec{z}) \rrbracket_{\alpha, \alpha, \vec{\gamma}}^M) \\
&= \forall_{A_\alpha} (\llbracket x \in y \Rightarrow \psi(x, y, \vec{z}) \rrbracket_{\alpha, \alpha, \vec{\gamma}}^M) \\
&= \forall_{A_\alpha} (\llbracket x \in y \Rightarrow \psi(x, y, \vec{z}) \rrbracket_{\mu(\alpha), \mu(\alpha), \mu(\vec{\gamma})} \circ (a_\alpha \times a_\alpha \times a_{\vec{\gamma}})) \\
&= \forall_{\mu(\alpha)} (\llbracket x \in y \Rightarrow \psi(x, y, \vec{z}) \rrbracket_{\mu(\alpha), \mu(\alpha), \mu(\vec{\gamma})} \circ (Id \times a_\alpha \times a_{\vec{\gamma}})) \\
&= \forall_{\mu(\alpha)} (\llbracket x \in y \Rightarrow \psi(x, y, \vec{z}) \rrbracket_{\mu(\alpha), \mu(\alpha), \mu(\vec{\gamma})} \circ (a_\alpha \times a_{\vec{\gamma}})) \\
&= \llbracket \forall_{\mu(\alpha)} x x \in y \Rightarrow \psi(x, y, \vec{z}) \rrbracket_{\mu(\alpha), \mu(\vec{\gamma})} \circ (a_\alpha \times a_{\vec{\gamma}}) \\
&= \llbracket \forall x x \in y \Rightarrow \psi(x, y, \vec{z}) \rrbracket_{\mu(\alpha), \mu(\vec{\gamma})} \circ (a_\alpha \times a_{\vec{\gamma}}).
\end{aligned}$$

Ähnlich zeigt man mit Lemma 2.49, Folgerung 2.50 und Folgerung 3.15(ii) auch noch die Absolutheit von $\varphi := \exists x x \in y \wedge \psi(x, y, \vec{z})$ gilt. Insgesamt haben wir also Theorem 5.1 gezeigt. \square

Zusammenfassend haben wir also die beiden obigen Fragen nicht abschließend beantworten können. Es scheint möglich zu sein, eventuell diese Fragen noch klären zu können, doch wohl nur unter einem sehr großen technischen Aufwand. Dieser Aufwand scheint desweiteren nicht einem vernünftigen Verhältniss zum Nutzen zu stehen.

Abschließend wollen wir nun noch kurz die Frage der konstruktiblen Hierarchie ansprechen. Ein Ziel der Definition eines inneren Topos war es, einen Topos \mathbb{L} zu finden, für den gilt $\mathbb{L} \models V = L$. Naheliegend hierfür ist natürlich eine Hierarchie $\mathcal{L} = (L_\alpha)_{\alpha \in On}$ zu definieren, wobei $l_\alpha : L_\alpha \hookrightarrow V_\alpha$ das zu $\llbracket L(x) \rrbracket_\alpha$ gehörige Unterobjekt ist. Angenommen, für unseren Topos \mathcal{E} und unsere Hierarchie \mathcal{L} gelten nun alle Bedingung, sodass wir im Topos $V_{\mathcal{L}}$ Mengenlehre betreiben können und dass Σ_0 -Formeln im Sinne von Theorem 5.1 absolut sind. Im booleschen Fall ist wenigstens die Produkt-, Σ_0 -Formel- und Exponentiationsabgeschlossenheit wohlbekannt.

Ferner müssen wir noch annehmen, dass die $(L_\alpha)_{\alpha \in On}$ auch die von-Neumann-Hierarchie in $V_{\mathcal{L}}$ ist. Es gelte also, dass $\mu(\alpha) = \alpha$ und $a_\alpha = l_\alpha$. Sei nun $\mathbb{L} := V_{\mathcal{L}}$. Unter diesen Annahmen können wir nun folgendes Theorem beweisen:

THEOREM 5.2. $\mathbb{L} \models V = L$.

Beweis: Wir müssen nun zeigen, dass $\llbracket \forall x L(x) \rrbracket = \mathbf{true}$. Dies gilt genau dann, wenn für alle $\alpha \in On$, $\llbracket L(x) \rrbracket_\alpha^{\mathbb{L}} = \mathbf{true}_{L_\alpha}$ gilt. Da diese Formel $L(x)$ eine Σ_0 -Formel ist, erhalten wir nach Theorem 5.1, dass

$$\llbracket L(x) \rrbracket_\alpha^{\mathbb{L}} = \llbracket L(x) \rrbracket_\alpha \circ l_\alpha.$$

Nach der Definition L_α ist die rechte Seite der Gleichung aber gerade \mathbf{true}_{L_α} .

□

Literaturverzeichnis

- [B77] J.L. Bell, Boolean-valued models and independence proofs in set theory, Oxford University Press, 1977
- [BS89] A. Blass, A. Scedrov, Freyd's Model for the Independence of the Axiom of Choice, AMS, 1989
- [B94] F. Borceux, Handbook of Categorical Algebra, Cambridge University Press, 1994
- [F80] M.P. Fourman, Sheaf models for set theory, Journal of Pure and Applied Algebra 19, 91-101, 1980
- [J02] P.T. Johnstone, Sketches of an Elephant - A Topos Theory Compendium, Oxford University Press 2002
- [K96] P. Koepke, Mengenlehre, Skript
- [M71] S. MacLane, Categories for the Working Mathematician, Springer Verlag, 1971
- [MM92] S. MacLane, I. Moerdijk, Sheaves in Geometry and Logic, Springer Verlag, 1992
- [MR77] M. Makkai, G. E. Reyes, First Order Categorical Logic, Springer-Verlag, 1977

Index

- $(-, -)$, 71
- $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$, 11
- $SubA$, 26
- $V_{\mathcal{M}}$, 86
- Ω , 20
- Ω^A , 20
- \Rightarrow , 32
- \exists_A , 38
- \exists_n , 41
- \forall_A , 36
- \leq , 27
- $\mathcal{E} \models \varphi$, 53
- \neg , 33
- \bar{f} , 20
- false**_A, 23
- true**_A, 17
- \vee , 29
- \wedge , 27
- ev_A , 19

- Beck-Chevalley-Gleichung
 - Allquantor, 36
 - Existenzquantor, 39
- Bilderlegung, 24

- disjunkte Vereinigung, 14

- Equalizer, 12

- Hierarchie
 - Unter-, 77
 - von-Neumann-, 51

- Kategorie, 11
 - lokal klein, 11
 - vollständig, 14

- Morphismus, 11
 - Bild eines, 23
 - charakteristischer, 17
 - Epi-, 15
 - Erweiterung eines, 80
 - Graph eines, 79
 - Iso-, 15
 - Mono-, 15

 - Transponierte eines, 20

- Objekt, 11
 - initial, 13
 - terminal, 11
 - Unter-, 16

- Potenzobjekt, 19
- Produkt, 11
- Pullback, 12
- Pullback-Quadrat, 12
- Pushout, 14

- Substitution, 47

- Topos, 20
 - boolesch, 33

- Unterobjektklassifizierer, 17
- Urbild, 18