1. Vektorraum

Aufgabe 1.1. *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Definiere den Begriff eines Vektorraumes über $\mathbb{K}$.*

Aufgabe 1.2. *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$- Vektorraum. Definiere den Begriff $\mathbb{K}$-Untervektorraum von V und beweise das jeder $\mathbb{K}$-Untervektorraum von V ein $\mathbb{K} - Vektorraum$ ist.*

Aufgabe 1.3. *Beweise oder widerlege, dass folgende Mengen Untervektorräume sind,*

- $\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | x^3 + 2y - xz = 0\}$
- $L(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}),$
- $\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | x + 2y - z = 0 \text{ und } x + 3y = 2\}$
- $\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | x + 2y - z = 0 \text{ und } x + 3y = 0\}$

2. Lineare Unabhängigkeit

Aufgabe 2.1. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $v_1, ..., v_n$ Elemente von V. Definiere, wann $v_1, ..., v_n$ linear unabhängig heißen.*

Aufgabe 2.2. *Überprüfe, ob folgende Vektoren linear unabhängig sind:*

- $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 4,5 \\ -6 \end{pmatrix}$ *im* $\mathbb{R}^3$,
- $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -16 \\ -6 \\ 0 \\ 14 \\ 2 \end{pmatrix}$ *im* $\mathbb{R}^5$,
- $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ *im im* $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 2.3. *Für welche Werte von $\lambda \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $\begin{pmatrix} 5 - \lambda \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -6 - \lambda \end{pmatrix}$ linear abhängig?*

3. Lineare Hülle und Basen

Aufgabe 3.1. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $v_1, ..., v_n$ Elemente von V. Definiere die lineare Hülle von $v_1, ..., v_n$.*

Aufgabe 3.2. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $v_1, ..., v_n$ Elemente von V. Definiere, wann $v_1, ..., v_n$ eine Basis von V ist.*

Aufgabe 3.3. *Wähle aus den Vektoren*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} -20 \\ 10 \\ 15 \\ 9 \end{pmatrix}$$

eine Basis für $L(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$.

Aufgabe 3.4. *Sei* V *ein* $\mathbb{K}$*-Vektorraum,* $(v_1, ..., v_n)$ *eine Basis von* V *und* $v \in V$*, beweise, dass genau ein* n*-tupel* $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$*,* $\alpha \in \mathbb{K}$*, existiert, so dass* $v = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i v_i$.

Aufgabe 3.5. *Bestimme jeweils eine Basis von den folgenden Vektorräumen*

- $L(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}) \subset \mathbb{R}^3$
- $L(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \subset \mathbb{R}^6$
- $\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 |\ x + 2y + z = 0$ *und* $x - y = 0\}$.

4. Schnitt von Untervektorräumen

Aufgabe 4.1. *Sei* V *ein* $\mathbb{K}$*-Vektorraum,* U, W *Untervektorräume von* V*. Beweise, dass* $U \cap W$ *ein Untervektorraum von* V *ist.*

Aufgabe 4.2. *Seien* $U := L(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix})$ *und* $W := L(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix})$ *Untervektorräume des* $\mathbb{R}^3$*. Bestimme eine Basis von* $U \cap W$.

Aufgabe 4.3. *Seien* $U := L(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix})$ *und* $W := L(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix})$ *Untervektorräume des* $\mathbb{R}^4$*. Bestimme eine Basis von* $U \cap W$.

5. Lineare Abbildungen

Aufgabe 5.1. *Seien* V, W $\mathbb{K}$*-Vektorräume,* $f : V \to W$ *eine Abbildung, definiere, wann* f *linear heißt.*

Aufgabe 5.2. *Sei* V, W $\mathbb{K}$*-Vektorräume,* $f : V \to W$ *eine lineare Abbildung, definiere* $Bild(f)$ *und* $Ker(f)$*. Weiter beweise, dass* $Bild(f)$ *ein Untervektorraum von* W *und* $Ker(f)$ *ein Untervektorraum von* V *ist.*

Aufgabe 5.3. *Seien* V, W K*-Vektorräume,* $(e_1, ..., e_n)$ *eine Basis von* V *und* $(f_1, ..., f_n)$ *Elemente von* W*, beweise, dass es dann genau eine lineare Abbildung* $H : V \to W$ *gibt, so dass für alle* i*,* $1 \leq i \leq n$*,* $H(e_i) = f_i$.

Aufgabe 5.4. *Sei* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ *eine lineare Abbildung,* $f(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, f(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *und* $f(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, *was ist dann* $f(\begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 19 \end{pmatrix})$*?*

Aufgabe 5.5. *Sei* $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4, x \mapsto Ax$, *wobei*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 & 4 & -1 \\ 2 & 10 & 6 & 8 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & -2 \\ 4 & 9 & 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme eine Basis von $Bild(f)$ *und eine Basis von* $Ker(f)$.

Aufgabe 5.6. *Seien* V, W $\mathbb{K}$*-Vektorräume,* $f : V \to W$ *lineare Abbildung, und* $v_1, ...v_n$ *Elemente von* V. *Beweise: Wenn* $f(v_1), ..., f(v_n)$ *linear unabhängig sind, dann sind auch* $v_1, ..., v_n$ *linear unabhängig. Gilt auch, dass jedes mal wenn* $v_1, ..., v_n$ *linear unabhängig sind, dass dann*$f(v_1), ..., f(v_n)$ *linear unabhängig sind?*

Aufgabe 5.7. *Seien* V, W $\mathbb{K}$*-Vektorräume,* $f : V \to W$ *lineare Abbildung, und* $v_1, ...v_n$ *Elemente von* V. *Beweise: Falls* $f(v_1), ..., f(v_n)$ *eine Basis von* $Bild(f)$ *ist, dann gibt es für alle* $v \in V$ *ein n-tupel* $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$, *so dass* $v - \sum_{i=0}^{n} \alpha_i v_i \in ker(f)$.

Aufgabe 5.8. *Seien* V, W $\mathbb{K}$*-Vektorräume,* $f : V \to W$ *lineare Abbildung, folgere aus Aufgaben 5.6 und 5.7, dass* $dim(V) = dimBild(f) + dimker(f)$.

6. Matrizen und $DM(f)$

Aufgabe 6.1. *Sei* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *eine lineare Abbildung, definiere* $DM(f)$.

Aufgabe 6.2. *Seien* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *und* $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ *lineare Abbildung. Beweise, dass* $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *ebenfalls linear ist. Weiter beweise:* $DM(g) \cdot DM(f) = DM(g \circ f)$.

Aufgabe 6.3. *Sei* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ *eine lineare Abbildung,* $f(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, f(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *und* $f(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, *bestimme* $DM(f)$.

Aufgabe 6.4. *Sei* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *eine lineare Abbildung,* $f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, f(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}$ *und* $f(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, *bestimme* $DM(f)$.

Aufgabe 6.5. *Berechne alle möglichen Matrixprodukte der folgenden Matrizen:*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

7. Injektiv, Surjektiv und Bijektiv

Aufgabe 7.1. *Sei $f : A \to B$ eine Abbildung, definiere, wann diese Abbildung injektiv, wann surjektiv und wann bijektiv ist.*

Aufgabe 7.2. *Seien V, W $\mathbb{K}$-Vektorräume, $f : V \to W$ lineare Abbildung, zeige, dass für zwei Vektoren $v, v' \in V$ mit $f(v) = f(v')$ gilt, $v - v' \in ker(f)$. Folgere daraus, dass f genau dann injektiv ist, wenn $ker(f) = \{0_V\}$*

Aufgabe 7.3. *Überprüfe, ob die linearen Abbildung aus den Aufgaben 5.4, 5.5 und 6.4 injektiv, surjektiv oder bijektiv sind.*

Aufgabe 7.4. *Seien V, W $\mathbb{K}$-Vektorräume, $f : V \to W$ lineare Abbildung, und $dimV > dimW$, beweise mit Hilfe von Aufgabe 5.8, dass f nicht injektiv ist.*

8. Multiple Choice

Aufgabe 8.1. *Wahr oder falsch?*

- *$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ lineare Abbildung, dann ist f surjektiv.*
- *Ein Gleichungssystem mit mehr Gleichungen als Unbekannten hat immer eine Lösung.*
- *Jeder Vektorraum hat ein eindeutiges Nullelement.*
- *Jeder Vektorraum hat ein eindeutiges Einselement.*
- *$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, g(x) = x^2$ ist surjektiv.*
- *$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = sin(x)$ ist injektiv.*
- *$h : [0, \pi] \to [-1, 1], h(x) = sin(x)$ ist bijektiv.*
- *A sei eine 3×3-Matrix, dann ist $\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$.*
- *A sei eine 3×3-Matrix, dann ist $\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$.*
- *Ein homogenes Gleichungssystem hat immer eine Lösung.*
- *Für jede 3×3-Matrix A gibt es eine Matrix B so dass $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.*
- *Sei V ein Vektorraum und $dim(V) = n$, dann gibt es für alle natürliche Zahlen $m \leq n$ einen Untervektorraum U von V mit $dim(U) = m$.*
- *Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, dann gibt es einen Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ mit $x \neq 0$ oder $y \neq 0$, so dass $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.*