Lösung zu Testate 13 Aufgabe 1.1 Teil 2

Gegeben sei die Matrix $B := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. Als erstes berechnen wir das charakteristische Polynom von B.

$$\begin{aligned} det(B-\lambda E) &= det(\begin{pmatrix} 0-\lambda & 2 & 2 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & -3-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda det(\begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 0 & -3-\lambda \end{pmatrix}) - 2det(\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & -3-\lambda \end{pmatrix}) + 2det(\begin{pmatrix} -2 & 3-\lambda \\ -2 & 0 \end{pmatrix}) \\ &= -\lambda(3-\lambda)(-3-\lambda) - 2(-2)(-3-\lambda) + 2(-1)(-2)(3-\lambda) \\ &= \lambda(\lambda^2-9) - 12 - 4\lambda + 12 - 4\lambda \\ &= \lambda(\lambda^2-1) = \lambda(\lambda-1)(\lambda+1). \end{aligned}$$

Also sind 0,1 und -1 die Nullstellen des charakteristischen Polynom und so Eigenwerte von B. Wir berechnen nun die entsprechenden Eigenvektoren.

$\underline{\lambda = 0}$: Wir müssen hier nun das folgende Gleichungssystem lösen: $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ lösen. Mittels Gauss erhalten wir:
$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ und so $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Also gibt $x_3 = -x_2$ und $x_1 = 1,5x_2$. Daher ist $\begin{pmatrix} 1,5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ Eigenvektor zum Eigenwert 0.

$\underline{\lambda = 1}$: Wir müssen hier nun das folgende Gleichungssystem lösen: $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ lösen. Mittels Gauss erhalten wir:
$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 0 \end{pmatrix}$ und so $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Also gibt $x_3 = -0,5x_2$ und $x_1 = x_2$. Daher ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -0,5 \end{pmatrix}$ Eigenvektor zum Eigenwert 1.

$\underline{\lambda = -1}$: Wir müssen hier nun das folgende Gleichungssystem lösen: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ lösen. Mittels Gauss erhalten wir:
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ und so $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Also gibt $x_3 = -2x_2$ und $x_1 = 2x_2$.
Daher ist $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ Eigenvektor zum Eigenwert -1.

Die in der Aufgabenstellung gesuchte Matrix P ist dann

$$\begin{pmatrix} 1,5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -0,5 & -2 \end{pmatrix}.$$