1. Euklidische Vektorräume

Im Skript: S. 151 - S.163.
Wichtig: Def. 16.1, Def. 16.2, Def. 16.4, Def. 16.11, Def. 16.14, Satz 16.17

Aufgabe 1.1. *Übung Nr. 43*

Lösung: Sei $w_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}$. Es gilt

$$\|v_1\| = \sqrt{< v_1, v_1 >} = \sqrt{36 + 25 + 1 + 4} = \sqrt{66}.$$

Also $w_1 = \frac{1}{\sqrt{66}} \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Nun setze

$$w_2 := \frac{v_2 - < v_2, w_1 > w_1}{\|v_2 - < v_2, w_1 > w_1\|}.$$

Wir rechnen nun aus:

$$\begin{aligned} v_2 - < v_2, w_1 > w_1 &= \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - < \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{66}} \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} > \frac{1}{\sqrt{66}} \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{36 + 25 + 3 + 2}{66} \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Da $\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \| = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$, ist

$$w_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nun setze

$$w_3 := \frac{v_3 - < v_3, w_2 > w_2 - < v_3, w_1 > w_1}{\|v_3 - < v_3, w_2 > w_2 - < v_3, w_1 > w_1\|}.$$

Wir rechnen wieder aus:

$v_3 - < v_3, w_2 > w_2 - < v_3, w_1 > w_1$

$$= \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - < \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} > \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - < \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{66}} \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} > \frac{1}{\sqrt{66}} \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{5}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{0}{66} \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daher ist $\| \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \| = \sqrt{25+36} = \sqrt{61}$. Also

$$w_3 = \frac{1}{\sqrt{61}} \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich sind w_1, w_2, w_3 orthonormal (rechnet, dass mal zum Test nach!) und so die gesuchte Basis.

Aufgabe 1.2. *Wiederholungsklausur letztes Jahr, Aufgabe 6, http://www.math.uni-bonn.de/people/irrgang/Wiederholung.pdf*

<u>Lösung:</u> http://www.math.uni-bonn.de/people/irrgang/MusterloesungNachklausur.ps