1. Aufgaben

Aufgabe 1.1. *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und V, W $\mathbb{K}$-Vektorräume. Wann heisst eine Abbildung $f : V \to W$ linear? Definiere $Ker(f)$ und $Bild(f)$.*

Aufgabe 1.2. *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und V, W $\mathbb{K}$-Vektorräume, $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Beweise: f injektiv, genau dann wenn $Ker(f) = \{0_V\}$.*

Aufgabe 1.3. *Wahr oder falsch? Seien A ein $n \times m$-Matrix und B eine $m \times n$-Matrix,*

- *BA ist definiert,*
- *$(AB)^T = B^T A^T$,*
- *es gibt genau eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, so dass $A = DM(f)$,*
- *$rang(A) < n$.*

Aufgabe 1.4. *Sei $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4, x \mapsto Ax$, wobei*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimme eine Basis des Bildes, die aus Spaltenvektoren von A besteht.

Aufgabe 1.5. *Berechne die inverse Matrix von* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 1.6. *Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung,* $f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, f(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}$ *und* $f(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, *bestimme $DM(f)$.*

Aufgabe 1.7. *Sei $f : M \to N$ Abbildung, A, B Teilmengen von N. Beweise:*

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

Aufgabe 1.8. *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung. Für $j \in \{1, \ldots, n\}$ sei* $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ *die j-te Spalte von $DM(f)$. Es gebe für $i > 1$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, so dass*

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} = \alpha_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + ... + \alpha_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Beweise, dass $\begin{pmatrix} -1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in Ker(f)$.