1. Aufgaben

Aufgabe 1.1. *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, definiere den Begriff des $\mathbb{K}$-Vektorraumes.*

Aufgabe 1.2. *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $(v_1, ..., v_n)$ Basis von V. Beweise, dass es für alle $v \in V$ genau ein n-Tupel $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ mit $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$ gibt, so dass $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$.*

Aufgabe 1.3. *Wahr oder falsch?*

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ *ist invertierbar,*
- $\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y = 0\}$ *ist Untervektorraum des* $\mathbb{R}^3$,
- $(\mathbb{R}^3, +, \cdot, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ *ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, wobei $+$ die normale Addition und $\cdot$ die normale Skalarmultiplikation ist.*
- $L(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix})$ *ist ein Vektorraum mit Dimension 3.*

Aufgabe 1.4. *Berechne die inverse Matrix von* $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 11 \\ 3 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 9 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 1.5. *Bestimme eine Basis von* $L(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}) \cap L(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix})$.

Aufgabe 1.6. *Bestimme eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren der Matrix* $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 1.7. *Sei $f : M \to N$ Abbildung, A, B Teilmengen von M. Beweise:*

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

Aufgabe 1.8. *Sei A, B zwei $n \times n$-Matrizen. Es gelte* $AB = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$.

Beweise: $BA = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$.