1. Übungsblatt 5

Lösung Aufgabe 13: Definiere $s(x,y) := (x\cdot(-y)) + ((-x)\cdot y)$ und $u(x,y) := x \cdot y$. Dann

x	y	$u(x,y)$	$s(x,y)$	$2\cdot u(x,y)+s(x,y)$	$x+y$
0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	2	2

Vgl. Halbaddierer Testat 4.

Lösung Aufgabe 14: B ist nicht vollständig.

Beweis: Sei $X := \{\{n\} | n \text{ gerade }\} = \{\{2\},\{4\},\{6\},...\} \subset B$. Das Supremum von X ist das Minimum folgender Menge: $\Omega := \{M \in B | \forall Y \in X\ Y \leq M\}$. Sei M nun in dieser Menge, dann gilt für alle ganzen, natürliche Zahlen n, $\{n\} \subseteq M$. Also enthält M alle ganzen Zahlen. M darf aber wegen der Definition von B nur endliche viele Zahlen nicht enthalten. Also gibt es endlich viele ungerade natürliche Zahlen $x_1,...,x_m$, so dass $M = \mathbb{N}\backslash\{x_1,...,x_m\}$.

Behauptung: Es existiert keine Minimum in Ω.

Angenommen $M \in \Omega$, wäre eine Minimum. Dann würde für alle $M' \in \Omega$ gelten, $M \subseteq M'$. Seien $x_1,...,x_m$ genau die ungerade Zahlen, die nicht in M liegen. Dann gibt es eine weitere ungerade Zahl$y$, die aber in M liegt. $M\backslash\{y\}$ enthält aber auch alle ganzen Zahlen und ist daher in Ω. Aber M ist keine Teilmenge von $M\backslash\{y\}$. Widerspruch!

Lösung Aufgabe 15: a) $(\{1\},\{2,3,4\},\emptyset,\{5,6\},(2 \mapsto (1,1,1), 3 \mapsto (1,1,1), 4 \mapsto (1,1), 5 \mapsto 1, 6 \mapsto 1))$.

b)$(\{1\},\emptyset,2,\emptyset,(2 \mapsto (1,1))$.

c) $(\{1\},\{2,3\},\{4\},\{5,6\},(2 \mapsto (1,1,1), 3 \mapsto (1,1,1), 4 \mapsto (1,1), 5 \mapsto 1, 6 \mapsto 1))$.

d) $(\{1,2\},\{3,4,5,6\},\emptyset,\{5,6,7\},(3 \mapsto (1,1,1), 4 \mapsto (1,2,1), 5 \mapsto (2,2,2), 6 \mapsto (2,2,2), 7 \mapsto 1, 8 \mapsto 2, 9 \mapsto 2))$.