

1. AUFGABEN

Sei $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, x \mapsto 2x$. Weiterhin betrachten wir vier Männer Peter, Paul, Patrik und Pascal, wobei Pascal der Vater von Patrik ist, Patrik der Vater von Paul und Paul der Vater von Peter ist.

Gegeben seien folgende Signaturen:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &:= (\{S_1\}, \{f_2\}, \{r_3\}, \emptyset, (f_2 \mapsto (S_1, S_1), r_2 \mapsto (S_1, S_1)), \\ \sigma_2 &:= (\{1\}, \{2\}, \emptyset, \{3, 4, 5\}, (2 \mapsto (1, 1, 1), 3 \mapsto 1, 4 \mapsto 1, 5 \mapsto 1)).\end{aligned}$$

Weiterhin seien die σ_1 -Strukturen

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &:= (\{\mathbb{N}\}, \{f\}, \{\leq_{\mathbb{N}}\}, \emptyset), \\ \mathcal{B} &:= (\{\text{Menschen}\}, \{\text{Vater von}\}, \{\text{junger als}\}, \emptyset),\end{aligned}$$

mit den Belegungen $\beta_{\mathcal{A}} : v_n^s \mapsto n+1$, und $\beta_{\mathcal{B}} : v_n^s \mapsto \text{Peter}$, falls n gerade, und $v_n^s \mapsto \text{Paul}$, falls n ungerade, gegeben. Wir definieren so zwei Modelle $\mathcal{M} := (\mathcal{A}, \beta_{\mathcal{A}})$ und $\mathcal{N} := (\mathcal{B}, \beta_{\mathcal{B}})$.

Sei $t_1 := f_2(f_2(v_5^{S_1})) \in T^{\sigma_1}$, $t_2 := f_2(f_2(f_2(v_8^{S_1}))) \in T^{\sigma_1}$, bestimme und $\varphi := r_3(f_2(v_5^{S_1}), v_{11}^{S_1}) \in \text{Aus}^{\sigma_1}$.

Aufgabe 1.1. *Wahr oder falsch?*

- (i) φ ist keine relationale Aussage.
- (ii) $\mathcal{N}(t_1) = \text{Patrik}$,
- (iii) $\mathcal{M}(t_1) = 24$,
- (iv) $\mathcal{M}(t_2) = 108$.

Lösung:(i) Falsch, siehe Skript Def. 4.1 (d).
(ii) Betrachte Skript Def. 4.4,

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(t_1) &= \mathcal{N}(f_2(f_2(v_5^{S_1}))) \\ &= \text{Vater von } \mathcal{N}(f_2(v_5^{S_1})) \\ &= \text{Vater von } (\text{Vater von } \mathcal{N}(v_5^{S_1})) \\ &= \text{Vater von } (\text{Vater von Paul}) \\ &= \text{Vater von Patrik} \\ &= \text{Pascal}.\end{aligned}$$

(iii) Wie in (ii):

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(t_1) &= \mathcal{M}(f_2(f_2(v_5^{S_1}))) \\ &= f(\mathcal{M}(f_2(v_5^{S_1}))) \\ &= f(f\mathcal{M}(v_5^{S_1})) \\ &= f(f(6)) \\ &= f(12) \\ &= 24.\end{aligned}$$

(iv) Wie in (ii):

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(t_2) &= \mathcal{M}(f_2(f_2(f_2(v_8^{S_1})))) \\ &= f(f(f(\mathcal{M}(v_8^{S_1}))) \\ &= f(f(f(9))) = f(f(18)) = f(36) = 72.\end{aligned}$$

□

Aufgabe 1.2. *Beweise oder widerlege: $\mathcal{N} \models \varphi$.*

Lösung: Nach Def. 4.4,

$$\begin{aligned}\mathcal{N} \models \varphi &\text{ gdw. } \mathcal{N} \models r_3(f_2(v_5^{S_1}), v_{11}^{S_1}) \\ &\text{ gdw. } \textit{jünger als}(\mathcal{N}(f_2(v_5^{S_1})), \mathcal{N}(v_{11}^{S_1})) \\ &\text{ gdw. } \textit{jünger als}(\textit{Vater von } \mathcal{N}(v_5^{S_1}), \textit{Paul}) \\ &\text{ gdw. } \textit{jünger als}(\textit{Vater von Paul}, \textit{Paul}) \\ &\text{ gdw. } \textit{Vater von Paul jünger als Paul}.\end{aligned}$$

Also ist $\mathcal{N} \models \varphi$ falsch.

□

Aufgabe 1.3. *Gebe eine beliebige σ_2 -Struktur an.*

Lösung: Zum Beispiel $(\{\mathbb{N}\}, \{+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}\}, \emptyset, \{1, 2, 3\})$.

□