1. Probeklausur 1

Aufgabe 1.1. *Sei* $\sigma = (S, F, R, K, fct)$ *eine Signatur und* $\mathcal{M} = (\mathcal{A}, \beta)$ *ein* σ*-Modell mit einer* σ*-Struktur* $\mathcal{A} = ((A_s)_{s\in S}, (f^{\mathcal{A}})_{f\in F}, (r^{\mathcal{A}})_{r\in R}, (k^{\mathcal{A}})_{k\in k})$*,*

(i) *Definiere für die Terme* $t \in T^\sigma$ *die Interpretation* $\mathcal{M}(t)$ *von* t *in* M*.*
(ii) *Definiere für die Aussagen* $\varphi \in Aus^\sigma$*, wann* $\mathcal{M} \models \varphi$*.*

Aufgabe 1.2. *Sei* $(P, \leq)$ *ein partielle Ordnung. Weiterhin sei eine weitere Relation* R *auf* P *durch*

$$aRb \text{ gdw. } sup(a, b) \text{ existiert.}$$

definiert. Beweise, dass R *reflexsiv und symmetrisch ist, und gebe ein Beispiel für* $(P, \leq)$ *an, so dass* R *nicht transitiv ist.*

Aufgabe 1.3. *Wahr oder falsch?*

- *Es gibt keine transitive, symmetrische Relation, die nicht reflexsiv ist.*
- *Sei* X *ein Menge, dann ist* $\subseteq$ *eine Äquivalenzrelation auf* $P(X)$*.*
- *In jeder booleschen Algebra* $(B, +, \cdot, -, 0, 1)$ *gilt für alle* $x \in B$ $-(x + (-x)) = 1$*.*
- *Jede relationale Aussage ist eine Aussage.*

Aufgabe 1.4. *Gebe einen formalen Beweise für die Tautologie*

$$(\varphi \to ((\psi \wedge \chi) \to \omega)) \to (\chi \to (\varphi \to (\psi \to \omega)))$$

an.

Aufgabe 1.5. *Sei* σ *eine Signatur mit einer Sorte* s*, einem zweistelligen Funktionssymbol* f*, einem zweistelligen Relationssymbol* r *und zwei Konstanten* c, k*. Zeige, dass folgende Aussage nicht allgemeingültig ist:*

$$\begin{aligned}
&(\forall v_0^s r(v_0, v_0))\wedge \\
&(\forall v_0^s \forall v_1^s \forall v_2^s ((r(v_0^s, v_1^s) \wedge r(v_1^s, v_2^s)) \to r(v_0^s, v_2^s)))\wedge \\
&(\forall v_0^s \forall v_1^s \forall v_2^s (r(v_0^s, v_1^s) \Leftrightarrow r(f(v_0^s, v_2^s), f(v_1^s, v_2^s))))\wedge \\
&(\neg r(c, k) \wedge \neg r(k, c)).
\end{aligned}$$

Aufgabe 1.6. *Sei* $(B, +, \cdot, -, 0, 1)$ *eine boolesche Algebra, beweise: für alle* $b, c, d \in B$ *gilt*

$$(b \cdot c) + d = d \text{ gdw. } b + ((-c) + d) = (-c) + d.$$

Aufgabe 1.7. *Sei* σ *eine Signatur,* $\mathcal{M} = (\mathcal{A}, \beta)$ *und* $\mathcal{N} = (\mathcal{B}, \gamma)$ *zwei* σ*-Modelle. Weiterhin sei* $\mathcal{A}$ *eine Substruktur von* $\mathcal{B}$ *und* $t \in T^\sigma$*. Beweise:*
Wenn für alle Variablen v_i^s*, die in* t *vorkommen gilt,* $\beta(v_i^s) = \gamma(v_i^s)$*, dann gilt* $M(t) = N(t)$*.*