1. Probeklausur 2

Aufgabe 1.1. *Definiere den Begriff einer Signatur, einer Struktur und eines Homomorphismuses zwischen Strukturen.*

Aufgabe 1.2. *Sei* $(B, +, \cdot, -, 0, 1)$ *eine boolesche Algebra, sei eine Relation* $\leq$ *auf* B *definiert durch,*

$$x \leq y \text{ gdw. } x \cdot (-y) = 0.$$

Beweise, dass $(B, \leq)$ *eine partielle Ordnung ist.*

Aufgabe 1.3. *Wahr oder falsch? Sei* $|_{\mathbb{N}}$ *die Teiler-Relation auf* $\mathbb{N}$, *weiterhin sei* R *eine Relation auf* $\mathbb{N}$ *definiert durch* $nRm \leftrightarrow n + m$ *ist gerade.*

- *Es gibt eine boolesche Algebra mit genau 3 Elementen.*
- *Die Relation* $|_{\mathbb{N}}$ *ist eine Äquivalenzrelation.*
- *Die Relation* R *ist transitiv.*
- *In jeder boolesche Algebra* $(B, +, \cdot, 0, 1)$*gilt für alle* $b, c \in B$: $b + ((-b) \cdot c) = b \cdot c$.

Aufgabe 1.4. *Gebe einen formalen Beweise für die Tautologie*

$$(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$$

an.

Aufgabe 1.5. *Sei* σ *eine Signatur mit einer Sorte* s, *einem zweistelligen Funktionssymbol* f, *einem zweistelligen Relationssymbol* r. *Zeige, dass folgende Aussage erfüllbar ist:*

$$\begin{aligned}
&(\forall v_0^s r(v_0, v_0))\wedge \\
&(\forall v_0^s \forall v_1^s \ (r(v_0^s, v_1^s) \wedge r(v_1^s, v_0^s)) \rightarrow \neg v_0^s = v_1^s))\wedge \\
&(\forall v_0^s \forall v_1^s \forall v_2^s ((r(v_0^s, v_1^s) \wedge r(v_1^s, v_2^s)) \rightarrow r(v_0^s, v_2^s)))\wedge \\
&(\forall v_0^s \forall v_1^s r(v_0^s, f(v_0^s, v_1^s)) \wedge r(v_1^s, f(v_0^s, v_1^s)))\wedge \\
&(\exists v_0^s \exists v_1^s \neg(r(v_0^s, v_1^s) \vee r(v_1^s, v_0^s)))
\end{aligned}$$

Aufgabe 1.6. *Sei* σ *eine Signatur mit einem Relationssymbol* R *und einer Sorte* s. *Gebe zwei Aussagen* $\varphi, \psi \in Aus^\sigma$ *an, so dass für jedes Modell* $\mathcal{M} = (\mathcal{A}, \beta)$ *gilt,*

(i) $\mathcal{M} \models \varphi$ *genau dann, wenn* $R^\mathcal{A}$ *eine Äquivalenzrelation ist.*
(ii) $\mathcal{M} \models \psi$ *genau dann, wenn* $\mathcal{A}_s$ *mindestens drei Elemente enthält.*

Aufgabe 1.7. *Sei* σ *eine Signatur,* $\mathcal{A}$ *eine* σ*-Struktur,* β *und* γ *zwei Belegungen von* $\mathcal{A}$. *Beweise:*

(i) *Sei* $t \in T^\sigma$ *ein Term und für alle Variablen* v_n^s, *die in* t *auftauchen, gelte* $\beta(v_n^s) = \gamma(v_n^s)$, *dann gilt* $(\mathcal{A}, \beta)(t) = (\mathcal{A}, \gamma)(t)$.
(ii) *Sei* $\varphi \in Aus^\sigma$ *eine Aussage, und für alle Variablen* v_n^s, *die in* φ *frei auftauchen, gelte* $\beta(v_n^s) = \gamma(v_n^s)$, *dann gilt* $(\mathcal{A}, \beta) \models \varphi$ *genau dann wenn* $(\mathcal{A}, \gamma) \models \varphi$.