1. Probeklausur 1

Aufgabe 1.1. *Sei* $\sigma = (S, F, R, K, fct)$ *eine Signatur und* $\mathcal{M} = (\mathcal{A}, \beta)$ *ein* σ*-Modell mit einer* σ*-Struktur* $\mathcal{A} = ((A_s)_{s\in S}, (f^{\mathcal{A}})_{f\in F}, (r^{\mathcal{A}})_{r\in R}, (k^{\mathcal{A}})_{k\in k})$*,*

(i) *Definiere für die Terme* $t \in T^\sigma$ *die Interpretation* $\mathcal{M}(t)$ *von* t *in* M*.*
(ii) *Definiere für die Aussagen* $\varphi \in Aus^\sigma$*, wann* $\mathcal{M} \models \varphi$*.*

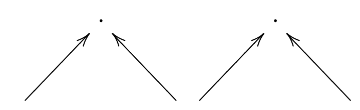
Lösung: Skript Def. 4.4

Aufgabe 1.2. *Sei* $(P, \leq)$ *ein partielle Ordnung. Weiterhin sei eine weitere Relation* R *auf* P *durch*

$$aRb \text{ gdw. } sup(a, b) \text{ existiert.}$$

definiert. Beweise, dass R *reflexsiv und symmetrisch ist, und gebe ein Beispiel für* $(P, \leq)$ *an, so dass* R *nicht transitiv ist.*

Lösung: Reflexsivität: sup(a,a)=a.
Symmetrie: $sup(a, b)$ ist das $\leq$-minimale Element c in P mit $a \leq c$ und $b \leq c$. Aber dieses Element c ist sicher auch das $\leq$-minimale Elemente mit $b \leq c$ und $b \leq c$ und $a \leq c$.
Gegenspiel gegen Transitivität:



Aufgabe 1.3. *Wahr oder falsch?*

- *Es gibt keine transitive, symmetrische Relation, die nicht reflexsiv ist.*
- *Sei* X *ein Menge, dann ist* $\subseteq$ *eine Äquivalenzrelation auf* $P(X)$*.*
- *In jeder booleschen Algebra* $(B, +, \cdot, -, 0, 1)$ *gilt für alle* $x \in B$ $-(x + (-x)) = 1$*.*
- *Jede relationale Aussage ist eine Aussage.*

Lösung:(i) Falsch. $\mathbb{N}$ und aRb gdw. $a = b \wedge a \neq 0$.
(ii) Falsch. Diese Relation ist nicht symmetrisch. Zum Beispiel für $X = \{0, 1\}$: $\{0\} \subseteq 0, 1$, aber $\{0, 1\} \not\subseteq \{0\}$.
(iii) Falsch. $-(x + (-x)) = -1 = 0$.
(iv) Wahr. Siehe Skript Def. 4.1

Aufgabe 1.4. *Gebe einen formalen Beweise für die Tautologie*

$$(\varphi \to ((\psi \wedge \chi) \to \omega)) \to (\chi \to (\varphi \to (\psi \to \omega)))$$

an.

Lösung:

1:	$[\varphi \to ((\psi \wedge \chi) \to \omega))$	Einführen einer Annahme
2:	$[\chi$	Einführen einer Annahme
3:	$[\varphi$	Einführen einer Annahme
4:	$[\psi$	Einführen einer Annahme
5:	$(\psi \wedge \chi) \to \omega)$	$\to$-Elimination mit 1 und 3
6:	$\psi \wedge \chi$	$\wedge$-Einführung mit 2 und 4
7:	$\omega]$	$\to$-Elimination mit 5 und 6
8:	$\psi \to \omega]$	$\to$-Einführung mit 4 und 7
9:	$\varphi \to (\psi \to \omega)]$	$\to$-Einführung mit 3 und 8
10:	$\chi \to (\varphi \to (\psi \to \omega))$	$\to$-Einführung mit 2 und 9
11:	$(\varphi \to ((\psi \wedge \chi) \to \omega)) \to (\chi \to (\varphi \to (\psi \to \omega)))$	

Aufgabe 1.5. *Sei σ eine Signatur mit einer Sorte s, einem zweistelligen Funktionssymbol f, einem zweistelligen Relationssymbol r und zwei Konstanten c, k. Zeige, dass folgende Aussage erfüllbar ist:*

$$\begin{aligned}
&(\forall v_0^s r(v_0, v_0))\wedge \\
&(\forall v_0^s \forall v_1^s \forall v_2^s ((r(v_0^s, v_1^s) \wedge r(v_1^s, v_2^s)) \to r(v_0^s, v_2^s)))\wedge \\
&(\forall v_0^s \forall v_1^s \forall v_2^s (r(v_0^s, v_1^s) \Leftrightarrow r(f(v_0^s, v_2^s), f(v_1^s, v_2^s))))\wedge \\
&(\neg r(c, k) \wedge \neg r(k, c)).
\end{aligned}$$

Lösung: Definiere $A_s := \mathbb{N}$, $r^{\mathcal{A}}(n, m)$ gdw. $n \leq m \wedge (n \neq 0 \vee m \neq 1)$, $f(n, m) = m + n$ für $n \neq 0$ und $f(0, m) = m + 2$. $c = 0$ und $k = 1$.

Aufgabe 1.6. *Sei $(B, +, \cdot, -, 0, 1)$ eine boolesche Algebra, beweise: für alle $b, c, d \in B$ gilt*

$$(b \cdot c) + d = d \text{ gdw. } b + ((-c) + d) = (-c) + d.$$

Lösung: Sei $(b \cdot c) + d = d$. Dann

$$\begin{aligned}
(-c) + d &= (-c) + (b \cdot c) + d \\
&= ((-c) + b) \cdot ((-c) + c) + d \\
&= (-c) + b + d.
\end{aligned}$$

Sei umgekehrt $b + ((-c) + d) = (-c) + d$. Dann

$$\begin{aligned}
d &= (c \cdot (-c)) + d \\
&= (c + d) \cdot (d + (-c)) \\
&= (c + d) \cdot (b + ((-c) + d)) \\
&= (c + d) \cdot ((b + (-c)) + d) \\
&= (c + d) \cdot ((b + (-c)) + d) \\
&= d + (c \cdot (b + (-c))) \\
&= d + ((c \cdot b) + (c \cdot (-c))) \\
&= d + (b \cdot c).
\end{aligned}$$

Aufgabe 1.7. *Sei σ eine Signatur, $\mathcal{M} = (\mathcal{A}, \beta)$ und $\mathcal{N} = (\mathcal{B}, \gamma)$ zwei σ-Modelle. Weiterhin sei $\mathcal{A}$ eine Substruktur von $\mathcal{B}$ und $t \in T^\sigma$. Beweise:*
Wenn für alle Variablen v_i^s, die in t vorkommen gilt, $\beta(v_i^s) = \gamma(v_i^s)$, dann gilt $\mathcal{M}(t) = \mathcal{N}(t)$.

Lösung: Induktion über den Termaufbau.
(i) Für alle Variablen v_i^s: Zu zeigen: Wenn $\beta(v_i^s) = \gamma(v_i^s)$, dann gilt $\mathcal{M}(v_i^s) = \mathcal{N}(v_i^s)$. Dies gilt da

$$\mathcal{M}(v_i^s) = \beta(v_i^s) = \gamma(v_i^s) = \mathcal{N}(v_i^s)$$

.
(ii) Für alle Konstantensymbole k: Zu zeigen: $\mathcal{M}(k) = \mathcal{N}(k)$. Dies gilt da $\mathcal{A}$ Substruktur von $\mathcal{N}$.
(iii) Für alle Terme $t = f(t_1, ..., t_n)$: Zu zeigen: Wenn für alle j gilt, (dass wenn für alle Variablen v_i^s, die in t_j vorkommen gilt, $\beta(v_i^s) = \gamma(v_i^s)$, dann gilt $\mathcal{M}(t_j) = \mathcal{N}(t_j)$), dann gilt, wenn für alle Variablen v_i^s, die in t vorkommen gilt, $\beta(v_i^s) = \gamma(v_i^s)$, dass $\mathcal{M}(t) = \mathcal{N}(t)$ gilt.

Wir nehmen also an, dass wenn für alle Variablen v_i^s, die in t_j vorkommen gilt, $\beta(v_i^s) = \gamma(v_i^s)$, dann gilt $\mathcal{M}(t_j) = \mathcal{N}(t_j)$. Gelte nun für alle v_i^s, die in t vorkommen, dann $\beta(v_i^s) = \gamma(v_i^s)$. Dann gilt dies auch für für alle v_i^s, die in t_j vorkommen. Also $\mathcal{M}(t_j) = \mathcal{N}(t_j)$. Dann

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(t) &= \mathcal{M}(f(t_1, ..., t_n)) \\
&= f^{\mathcal{A}}(\mathcal{M}(t_1), ..., \mathcal{M}(t_n)) \\
&= f^{\mathcal{B}}(\mathcal{M}(t_1), ..., \mathcal{M}(t_n)) \\
&= f^{\mathcal{B}}(\mathcal{N}(t_1), ..., \mathcal{N}(t_n)) \\
&= \mathcal{N}(f(t_1, ..., t_n)) \\
&= \mathcal{N}(t).
\end{aligned}$$

2. Probeklausur 2

Aufgabe 2.1. *Definiere den Begriff einer Signatur, einer Struktur und eines Homomorphismuses zwischen Strukturen.*

Aufgabe 2.2. *Sei* $(B, +, \cdot, -, 0, 1)$ *eine boolesche Algebra, sei eine Relation* $\leq$ *auf* B *definiert durch,*

$$x \leq y \text{ gdw. } x \cdot (-y) = 0.$$

Beweise, dass $(B, \leq)$ *eine partielle Ordnung ist.*

Aufgabe 2.3. *Wahr oder falsch? Sei* $|_{\mathbb{N}}$ *die Teiler-Relation auf* $\mathbb{N}$, *weiterhin sei* R *eine Relation auf* $\mathbb{N}$ *definiert durch* $nRm \leftrightarrow n + m$ *ist gerade.*

- *Es gibt eine boolesche Algebra mit genau 3 Elementen.*
- *Die Relation* $|_{\mathbb{N}}$ *ist eine Äquivalenzrelation.*
- *Die Relation* R *ist transitiv.*
- *In jeder boolesche Algebra* $(B, +, \cdot, 0, 1)$*gilt für alle* $b, c \in B$: $b + ((-b) \cdot c) = b \cdot c$.

Aufgabe 2.4. *Gebe einen formalen Beweise für die Tautologie*

$$(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$$

an.

Aufgabe 2.5. *Sei* σ *eine Signatur mit einer Sorte* s, *einem zweistelligen Funktionssymbol* f, *einem zweistelligen Relationssymbol* r. *Zeige, dass folgende Aussage nicht allgemeingültig ist:*

$$\begin{aligned}
&(\forall v_0^s r(v_0, v_0))\wedge \\
&(\forall v_0^s \forall v_1^s \ (r(v_0^s, v_1^s) \leftrightarrow r(v_1^s, v_0^s)))\wedge \\
&(\forall v_0^s \forall v_1^s \forall v_2^s ((r(v_0^s, v_1^s) \wedge r(v_1^s, v_2^s)) \rightarrow r(v_0^s, v_2^s)))\wedge \\
&(\forall v_0^s \forall v_1^s r(v_0^s, f(v_0^s, v_1^s)) \wedge r(v_1^s, f(v_0^s, v_1^s)))\wedge \\
&(\exists v_0^s \exists v_1^s \neg(r(v_0^s, v_1^s) \vee r(v_1^s, v_0^s)))
\end{aligned}$$

Aufgabe 2.6. *Sei* σ *eine Signatur mit einem Relationssymbol* R *und einer Sorte* s. *Gebe zwei Aussagen* $\varphi, \psi \in Aus^\sigma$ *an, so dass für jedes Modell* $\mathcal{M} = (\mathcal{A}, \beta)$ *gilt,*

(i) $\mathcal{M} \models \varphi$ *genau dann, wenn* $R^{\mathcal{A}}$ *eine Äquivalenzrelation ist.*
(ii) $\mathcal{M} \models \psi$ *genau dann, wenn* $\mathcal{A}_s$ *mindestens drei Elemente enthält.*

Aufgabe 2.7. *Sei* σ *eine Signatur,* $\mathcal{A}$ *eine* σ*-Struktur,* β *und* γ *zwei Belegungen von* $\mathcal{A}$. *Beweise:*

(i) *Sei* $t \in T^\sigma$ *ein Term und für alle Variablen* v_n^s, *die in* t *auftauchen, gelte* $\beta(v_n^s) = \gamma(v_n^s)$, *dann gilt* $(\mathcal{A}, \beta)(t) = (\mathcal{A}, \gamma)(t)$.
(ii) *Sei* $\varphi \in Aus^\sigma$ *eine Aussage, und für alle Variablen* v_n^s, *die in* φ *frei auftauchen, gelte* $\beta(v_n^s) = \gamma(v_n^s)$, *dann gilt* $(\mathcal{A}, \beta) \models \varphi$ *genau dann wenn* $(\mathcal{A}, \gamma) \models \varphi$.