1. Probeklausur 2

Aufgabe 1.1. *Definiere den Begriff einer Signatur, einer Struktur und eines Homomorphismuses zwischen Strukturen.*

Lösung: siehe Skript Def. 3.1, 3.3, 3.5.

Aufgabe 1.2. *Sei* $(B, +, \cdot, -, 0, 1)$ *eine boolesche Algebra, sei eine Relation* $\leq$ *auf* B *definiert durch,*

$$x \leq y \text{ gdw. } x \cdot (-y) = 0.$$

Beweise, dass $(B, \leq)$ *eine partielle Ordnung ist.*

Lösung: siehe Skript Satz 2.36.

Aufgabe 1.3. *Wahr oder falsch? Sei* $|_{\mathbb{N}}$ *die Teiler-Relation auf* $\mathbb{N}$*, weiterhin sei* R *eine Relation auf* $\mathbb{N}$ *definiert durch* $nRm \leftrightarrow n + m$ *ist gerade.*

- *Es gibt eine boolesche Algebra mit genau 3 Elementen.*
- *Die Relation* $|_{\mathbb{N}}$ *ist eine Äquivalenzrelation.*
- *Die Relation* R *ist transitiv.*
- *In jeder boolesche Algebra* $(B, +, \cdot, 0, 1)$*gilt für alle* $b, c \in B$*:* $b + ((-b) \cdot c) = b \cdot c$.

Lösung: (i) Falsch. Sei $B = \{0, 1, a\}$. Falls $-a = a$, dann $-a+a = a+a = a \neq 1$. Falls $-a = 0$, dann $-a + a = 0 + a = a \neq 1$. Falls $-a = 1$, dann $(-a) \cdot a = 1 \cdot a = a \neq 0$. Also gibt es keine solche boolsche Algebra.
(ii) Falsch. 2 teilt 4, aber 4 teilt nicht 2.
(iii) Wahr. Es gelte nRm und mRs. $n + s$ gerade gdw. $n + s + 2m$ gerade. Aber $n+m$ und $s+m$ sind gerade, also ist auch $n+m+s+m$ gerade. Also ist $n+s+2m$ gerade. Also ist $n + s$ gerade. Also nRs.
(iv) Falsch. $b + ((-b) \cdot c) = (b + (-b)) \cdot (b + c) = b + c$.

Aufgabe 1.4. *Gebe einen formalen Beweise für die Tautologie*

$$(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$$

an.

Lösung:

1:	$[\varphi \wedge \psi$	Einführen einer Annahme
2:	$[\varphi \rightarrow \neg\psi$	Einführen einer Annahme
3:	φ	$\wedge-$Elimination mit 1
4:	$\neg\psi$	$\rightarrow$-Elimination mit 2 und 3
5:	ψ	$\wedge-$Elimination mit 1
6:	$\perp]$	$\rightarrow$-Elimination mit 4 und 5
7:	$\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)]$	$\rightarrow$-Einführung mit 2 und 6

Aufgabe 1.5. *Sei* σ *eine Signatur mit einer Sorte* s*, einem zweistelligen Funktionssymbol* f*, einem zweistelligen Relationssymbol* r*. Zeige, dass folgende Aussage*

erfüllbar ist:

$$
\begin{aligned}
&(\forall v_0^s r(v_0, v_0))\wedge\\
&(\forall v_0^s \forall v_1^s\ (r(v_0^s, v_1^s) \wedge r(v_1^s, v_0^s)) \to \neg v_0^s = v_1^s))\wedge\\
&(\forall v_0^s \forall v_1^s \forall v_2^s((r(v_0^s, v_1^s) \wedge r(v_1^s, v_2^s)) \to r(v_0^s, v_2^s)))\wedge\\
&(\forall v_0^s \forall v_1^s r(v_0^s, f(v_0^s, v_1^s)) \wedge r(v_1^s, f(v_0^s, v_1^s)))\wedge\\
&(\exists v_0^s \exists v_1^s \neg(r(v_0^s, v_1^s) \vee r(v_1^s, v_0^s)))
\end{aligned}
$$

Lösung: $A_s := \mathbb{N}$, $r^{\mathfrak{A}}(n,m) gdw. n \leq m \wedge \neg(n = 0 \wedge m = 1)$, $f^{\mathfrak{A}}(n,m) = n+m+1$.

Aufgabe 1.6. *Sei σ eine Signatur mit einem Relationssymbol R und einer Sorte s. Gebe zwei Aussagen $\varphi, \psi \in Aus^\sigma$ an, so dass für jedes Modell $\mathcal{M} = (\mathcal{A}, \beta)$ gilt,*

(i) *$\mathcal{M} \models \varphi$ genau dann, wenn $R^{\mathcal{A}}$ eine Äquivalenzrelation ist.*
(ii) *$\mathcal{M} \models \psi$ genau dann, wenn $\mathcal{A}_s$ mindestens drei Elemente enthält.*

Lösung:(i)

$$
\begin{aligned}
\varphi =&(\forall v_0^s R(v_0, v_0))\wedge\\
&(\forall v_0^s \forall v_1^s\ (R(v_0^s, v_1^s) \leftrightarrow R(v_1^s, v_0^s)))\wedge\\
&(\forall v_0^s \forall v_1^s \forall v_2^s((R(v_0^s, v_1^s) \wedge R(v_1^s, v_2^s)) \to R(v_0^s, v_2^s))).
\end{aligned}
$$

(ii)

$$\psi = \exists v_0^s \exists v_1^s \exists v_2^s \neg(v_0^s = v_1^s \vee v_0^s = v_2^s \vee v_1^s = v_2^s).$$

Aufgabe 1.7. *Sei σ eine Signatur, $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur, β und γ zwei Belegungen von $\mathcal{A}$. Beweise:*

(i) *Sei $t \in T^\sigma$ ein Term und für alle Variablen v_n^s, die in t auftauchen, gelte $\beta(v_n^s) = \gamma(v_n^s)$, dann gilt $(\mathcal{A}, \beta)(t) = (\mathcal{A}, \gamma)(t)$.*
(ii) *Sei $\varphi \in Aus^\sigma$ eine Aussage, und für alle Variablen v_n^s, die in φ frei auftauchen, gelte $\beta(v_n^s) = \gamma(v_n^s)$, dann gilt $(\mathcal{A}, \beta) \models \varphi$ genau dann wenn $(\mathcal{A}, \gamma) \models \varphi$.*

Lösung:(i) Induktion über den Termaufbau:
(a) $t = v_n^s$: Dann $\beta(v_n^s) = \gamma(v_n^s)$. Also $(\mathcal{A}, \beta)(t) = (\mathcal{A}, \gamma)(t)$.
(b) $t = c_k$: $(\mathcal{A}, \beta)(t) = c_k^{\mathfrak{A}} = (\mathcal{A}, \gamma)(t)$. (c) $t = f(t_1, ..., t_n)$: Angenommen die Behauptung gelte für $t_1, ..., t_n$. Weiterhin gelte für alle Variablen v_n^s, die in t auftauchen, $\beta(v_n^s) = \gamma(v_n^s)$. Dann gilt für alle i: für alle Variablen v_n^s, die in t_i auftauchen, gilt ebenfalls $\beta(v_n^s) = \gamma(v_n^s)$. Also nach Induktionvorraussetzung gilt für alle i $(\mathcal{A}, \beta)(t_i) = (\mathcal{A}, \gamma)(t_i)$. Dann gilt auch

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{A}, \beta)(t) &= (\mathcal{A}, \beta)(f(t_1, ..., t_n))\\
&= f^{\mathfrak{A}}((\mathcal{A}, \beta)(t_1), ..., (\mathcal{A}, \beta)(t_n))\\
&= f^{\mathfrak{A}}((\mathcal{A}, \gamma)(t_1), ..., (\mathcal{A}, \gamma)(t_n))\\
&= (\mathcal{A}, \gamma)(f(t_1, ..., t_n))\\
&= (\mathcal{A}, \gamma)(t).
\end{aligned}
$$

(ii) Induktion über den Formelaufbau:
(a) Für relationale Formeln folgt dies aus (i):

$$\begin{aligned}(\mathcal{A},\beta) \models r(t_1,...,t_n) \text{ gdw. } & r^{\mathfrak{A}}((\mathcal{A},\beta)(t_1),...,(\mathcal{A},\beta)(t_n))\\ \text{gdw. } & r^{\mathfrak{A}}((\mathcal{A},\gamma)(t_1),...,(\mathcal{A},\gamma)(t_n))\\ \text{gdw. } & (\mathcal{A},\gamma) \models r(t_1,...,t_n).\end{aligned}$$

Weiterhin seinen nun φ, ψ zwei Formeln, so dass, wenn für alle Variablen v_n^s, die in φ bzw. in ψ frei auftauchen, gelte $\beta(v_n^s) = \gamma(v_n^s)$, dann gilt $(\mathcal{A},\beta) \models \varphi$ genau dann wenn $(\mathcal{A},\gamma) \models \varphi$ bzw. $(\mathcal{A},\beta) \models \psi$ genau dann wenn $(\mathcal{A},\gamma) \models \psi$.
(b) Sei nun zum Beispiel $\chi = \varphi \wedge \psi$ und für alle Variablen v_n^s, die in χ frei auftauchen, gelte $\beta(v_n^s) = \gamma(v_n^s)$. Dann gilt auch für alle Variablen v_n^s, die in φ oder ψ frei auftauchen, $\beta(v_n^s) = \gamma(v_n^s)$. Also gilt $(\mathcal{A},\beta) \models \varphi$ genau dann wenn $(\mathcal{A},\gamma) \models \varphi$ und $(\mathcal{A},\beta) \models \psi$ genau dann wenn $(\mathcal{A},\gamma) \models \psi$. Also

$$\begin{aligned}(\mathcal{A},\beta) \models \chi \text{ gdw. } & (\mathcal{A},\beta) \models \varphi \wedge \psi\\ \text{gdw. } & (\mathcal{A},\beta) \models \varphi \text{ und } (\mathcal{A},\beta) \models \psi\\ \text{gdw. } & (\mathcal{A},\gamma) \models \varphi \text{ und } (\mathcal{A},\gamma) \models \psi\\ \text{gdw. } & (\mathcal{A},\gamma) \models \varphi \wedge \psi\\ \text{gdw. } & (\mathcal{A},\gamma) \models \chi.\end{aligned}$$

(c) Sei nun $\chi = \forall v_i^s \varphi$ und für alle Variablen v_n^s, die in χ frei auftauchen, gelte $\beta(v_n^s) = \gamma(v_n^s)$. Sei $a \in A$. Dann gilt für alle freien Variablen v_n^s in φ, $\beta\frac{a}{v_i^s}(v_n^s) = \gamma\frac{a}{v_i^s}(v_n^s)$. Also

$$\begin{aligned}(\mathcal{A},\beta) \models \chi \text{ gdw. } & (\mathcal{A},\beta) \models \forall v_i^s \varphi\\ \text{gdw. } & \forall a \in A_s(\mathcal{A},\beta\frac{a}{v_i^s}) \models \varphi\\ \text{gdw. } & \forall a \in A_s(\mathcal{A},\gamma\frac{a}{v_i^s}) \models \varphi\\ \text{gdw. } & (\mathcal{A},\gamma) \models \forall v_i^s \varphi\\ \text{gdw. } & (\mathcal{A},\gamma) \models \chi.\end{aligned}$$