Tutorium I

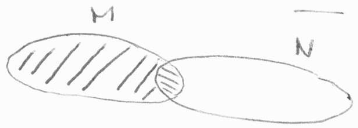
Teil 1

Def: Seien M, N Mengen, $M \cup N := \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\}$ ist die Vereinigung von M und N.

$M \cap N := \{x \mid x \in M \text{ und } x \in N\}$ ist der Schnitt von M und N.

$M \setminus N := \{x \mid x \in M \text{ und } x \notin N\}$ ist die Differenz von M und N.

Bem: $M \cup N$ ist also die Menge aller Elemente, die in M oder N liegen,
$M \cap N$ — " — , die in M und N liegen,
und $M \setminus N$ — " — , die in M, aber nicht in N liegen.



\\\ $M \cap N$
≡ $M \setminus N$

Inhalt beider Kreise zusammen ⇝ $M \cup N$

Beispiel: $M := \{2; 3; 5\}$ $N := \{3; 7; 11; 13; 17\}$,
dann $M \cap N = \{3\}$, $M \cup N := \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17\}$.
Und $M \setminus N = \{2; 5\}$, aber $N \setminus M = \{7; 11; 13; 17\}$.

Def: Seien M, N Mengen, M ist Teilmenge von N, falls gilt

$$\forall x \quad x \in M \Rightarrow x \in N.$$

Wir schreiben dafür $M \subset N$.

Bem: Anschaulich heißt das: M ist Teilmenge von N, wenn alle Elemente von M auch in N liegen.

z.B.

Beispiele: (i) M und N wie im letzten Beispiel: dann M keine Teilmenge von N.
Denn „5 liegt nicht in N". Mathematisch korrekter:

$$5 \in M \Rightarrow 5 \in N \quad \text{ist falsch.}$$

Also ist die Aussage $\forall x \quad x \in M \Rightarrow x \in N$ falsch.

(ii) M weiter wie oben, $S := \{2; 3\}$, dann ist S Teilmenge von M:
denn $2 \in \cancel{M}\, S \Rightarrow 2 \in M$ ist wahr
und $3 \in \cancel{M}\, S \Rightarrow 3 \in M$ ist wahr.

Beachte: ~~...~~ Für alle $x \notin \cancel{M} S$ ist $x \in S \Rightarrow x \in M$ wahr.

Bem: Zwei Mengen sind gleich, wenn sie die gleichen Elemente besitzen. Dies ist genau dann, der Fall, falls sie jeweils Teilmenge der anderen sind. Also

$$M = N \Leftrightarrow (M \subset N \text{ und } N \subset M).$$

Um Aussage über die gerade definierten Mengenoperationen zu beweisen, müssen wir diese auf „logische Aussagen" zurückführen.

Satz: M, N Mengen, dann $M \cap N \subset M \cup N$.

Beweis: Anschaulich ist das klar.

Formell: Zu zeigen ist $\forall x \quad x \in M \cap N \Rightarrow x \in M \cup N$.

Also sei dafür $x \in M \cap N$. Wir wollen zeigen, dass $x \in M \cup N$.

$x \in M \cap N \Rightarrow x \in M$ und $x \in N \Rightarrow x \in M$ oder $x \in N \Rightarrow x \in M \cup N$.

$\boxtimes$

Bem.: Beachte, dass unser "oder" nicht exklusiv ist!
Für weitere Beispiele, siehe Vorlesung und Übungsblätter.

Teil 2

Def: Sei $f: M \to N$ ein Abbildung zwischen den Mengen M und N, dann heißt f surjektiv, falls

$$\forall y \in N \; \exists x \in M \text{ mit } f(x) = y.$$

f heißt injektiv, falls

$$\forall x, x' \in M \text{ gilt } f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

Bem: Surjektiv bedeutet, dass alle Werte in N von der Form $f(x)$ für ein ~~bestimm~~ $x \in M$.
Injektiv bedeutet, dass jedes x eindeutig durch seinen Wert von f bestimmt ist.

Beispiele: (i) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \to x^2$ ist weder injektiv, noch surjektiv:

denn für $2, -2$ ist $f(-2) = f(2) \Rightarrow 2 = -2$ falsch,

und für $-1 \in \mathbb{R}$ gibt es kein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = -1$.

Beachte: $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $x \mapsto x^2$ ist surjektiv,

und $h: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist injektiv und surjektiv.

(ii) Matr: {Studenten} $\longrightarrow \mathbb{N}$

$S \mapsto$ Matrikelnummer von S ist injektiv, aber nicht surjektiv.

Def: $f: M \to N$ heißt bijektiv, falls f injektiv ist und f surjektiv ist.

Beispiele: (i) h aus obigen Beispiel.

(ii) $\{1, 2, 3\} \longrightarrow \{4, 5, 6\}$ ist bijektiv.

$1 \mapsto 5$

$2 \mapsto 4$

$3 \mapsto 6$

Aufgaben:

(1) Wahr oder falsch? M, N, S Mengen

☐ $f: M \to M$ ist genau dann surjektiv, wenn es injektiv ist.

☐ Es gibt keine Bijektivabbildung von $\{1,2\} \to \{1\}$

☐ $(M \cap N) \setminus S = (M \setminus N) \setminus S$

☐ $(M \cup N) \cap N = (M \cap N) \cup N$

Lösung: (i) falsch, $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto 2x$ ist injektiv, aber nicht surjektiv.

(ii) richtig. Ein solche Abbildung könnte nicht einmal injektiv sein, da immer gilt $f(1) = 1 = f(2)$.

(iii) falsch. $M = \{1,2\}$ $N := \{1\}$ $S := \{4\}$

$(M \cap N) \setminus S = \{1\}$ $(M \setminus N) \setminus S = \{2\}$

(iv) richtig. (Distributivgesetz für $\cup$ und $\cap$)

(2) Geben Sie eine injektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ an, die nicht surjektiv ist.

Lösung: Siehe (1) i.

(3) Beweise: $(M \cap N) \cup N = N$

Lösung: "$\subseteq$" $x \in (M \cap N) \cup N \Rightarrow x \in M \cap N$ oder $x \in N \Rightarrow ((x \in M$ und $x \in N)$ oder $x \in N)$

$\Rightarrow (x \in M$ oder $x \in N)$ und $(x \in N$ oder $x \in N) \Rightarrow x \in N$.

"$\supseteq$" $x \in N \Rightarrow x \in N$ oder $x \in M \cap N \Rightarrow x \in (M \cap N) \cup N$.