Relationen

<u>Def</u> M,N Mengen, dann ist $M \times N$ die Menge aller ~~...~~ geordneter Paare von Elementen aus M und N, i.e.

$$M \times N := \{ (m,n) \mid m \in M \text{ und } n \in N \}.$$

<u>Def</u> Sei M eine Menge, R ist ein <u>Relation</u> auf M, wenn es eine Teilmenge von $M \times M$ ist, also $R \subset M \times M$.
Wenn $(x,y) \in R$ ist, schreiben wir auch $x R y$.

<u>Bem:</u> Während Funktionen Elementen andere Elemente zu weisen, beschreiben Relation „Verhältnisse" oder Zusammenhänge zwischen Elementen.

<u>Beispiele:</u> (i) $M := \mathbb{N}$ $R := \{(n,n') \mid n \leq n'\}$

(ii) $M := \mathbb{N}$ $S := \{ (n,n') \mid n \mid n' \}$
Wir schreiben auch $n S n' \Leftrightarrow n \mid n'$

(iii) $\mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} T \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \;\; \lambda x = x' \wedge \lambda y = y' \wedge \lambda z = z'$

(iv) $M := \mathbb{N}$ $m \in \mathbb{N}$ gegeben
$$n U n' \Leftrightarrow n \bmod m = n' \bmod m$$

(v) $\{\text{Männer}\} \ni m, m'$ $m V m' \Leftrightarrow m'$ ist Vater von m

(vi) $\{\text{Menschen}\} \ni m, m'$ $m W m' \Leftrightarrow m$ liebt m'

(vii) $\{\text{Autos}\} \ni m, m'$ $m X m' \Leftrightarrow m$ und m' haben die gleiche Farbe.

<u>Def:</u> Sei M ein Menge, R eine Relation auf M, dann heißt R

(i) reflexiv, falls $\forall m \in M$: mRm gilt

(ii) symmetrisch, falls $\forall m, m' \in M$: $mRm' \Rightarrow m'Rm$

(iii) transitiv, falls $\forall m, m', n \in M$: $mRm' \wedge m'Rn \Rightarrow mRn$

(iv) antisymmetrisch, falls $\forall m, m' \in M$ $mRm' \wedge m'Rm \Rightarrow m = m'$

Eine Relation R heißt Äquivalenzrelation, falls R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Wir überprüfen nun die vorherigen Beispiel auf diese Eigenschaften

Beispiele (i) R ist reflexsiv, transitiv und anti-symmetrisch, aber nicht symmetrisch:

reflexsiv: Für alle natürlichen Zahlen gilt sicher

$n \leq n$, also nRn. Also ist R reflexsiv.

transitiv: seien $n, n', m \in \mathbb{N}$ gegeben mit $nRn' \wedge n'Rm$. Dann ist zu zeigen: nRm.

$nRn' \wedge n'Rm$ bedeutet $n \leq n' \wedge n' \leq m$. Für natürliche Zahlen gilt aber $n \leq n' \leq m \Rightarrow n \leq m$. Also ist nRm und R transitiv.

Anti-symm.: Seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit $nRm \wedge mRn$. Dann gilt $n \leq m$ und $m \leq n$. Dann gilt auch $m = n$. Also ist R anti-symmetrisch.

Nicht symmetrisch: $2R3$ aber nicht $3R2$.

(iv) U ist Äquivalenzrelation:

reflexsiv: $nUn \Leftrightarrow n \bmod m = n \bmod m$ ✓

symmetrisch: $nUn' \Leftrightarrow n \bmod m = n' \bmod m \Leftrightarrow n' \bmod m = n \bmod m$

$\Leftrightarrow n'Un$

transitiv: $nUn' \wedge n'Un'' \Leftrightarrow n \bmod m = n' \bmod m \wedge n' \bmod m = n'' \bmod m$

$\Rightarrow n \bmod m = n'' \bmod m$.

$\Rightarrow n\, U n''$.

(v) V ist weder reflexsiv, symmetrisch noch transitiv:

reflexsiv: Niemand ist Vater von sich selber.

Symmetrisch: Wenn m' Vater von m ist, kann m nicht Vater von m' sein

transitiv: Wenn m' Vater von m und m'' Vater m' ist, ist m'' Großvater von m, aber nicht Vater von m.

Übung Beweise (iii) und (vii) sind Äquivalenzrelationen.

Def: Sei M eine Menge, R eine Äquivalenzrelation, $m \in M$,

$$[m]_R := \{m' \in M \mid m'Rm\}$$ heißt die

Äquivalenzklasse von m bezüglich R.

Beispiel: (i) Betrachte U aus den vorherigen Beispielen, $n \in \mathbb{N}$, dann

$$[n]_U = \{n' \in \mathbb{N} \mid nUn'\} = \{n' \in \mathbb{N} \mid n \bmod m = n' \bmod m\}$$

$$= \{n' \in \mathbb{N} \mid n - n' \bmod m\}$$

Für $m = 2$ $\quad [n]_U = \{n' \in \mathbb{N} \mid n - n' \bmod 2\}$

(ii) Betrachte Relation X, sei a ein Auto,

$$[a]_X = \{a' \in \{\text{Autos}\} \mid aXa'\} = \{a' \in \{\text{Autos}\} \mid a \text{ und } a' \text{ haben dieselbe Farbe}\}$$

<u>Satz</u> M Menge, R Relation, $m, m' \in M$, dann

$$[m]_R = [m']_R \iff mRm'$$

$$[m]_R \cap [m']_R = \emptyset \iff \neg\, mRm'.$$

<u>Beispiel</u> (i) Betrachte Relation X, sei a ein rotes Auto,

dann ist $[a]_X$ die Menge aller roten Autos.

(ii) Betrachte Relation T,

$$\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right]_T = \left\{ \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \,\middle|\, \exists \lambda \ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \text{Gerade durch } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Die Menge aller Äquivalenzklassen bzgl. T ist die Menge aller Geraden.

(iii) Betrachte U mit $m=2$,

$n U n' \iff$ (n und n' gerade) oder (n' und n ungerade)

Also gibt es zwei Äquivalenzklassen $[0]_U$ und $[1]_U$.

<u>Testat</u>

*) Für zwei natürliche Zahlen n, n' definiert $nRn' \iff n = n' \bmod 3$

$nSn' \iff n \mid n'$

① Wahr oder falsch?

- R ist Äquivalenzrelation
- R hat drei verschiedene Äquivalenzklassen
- S ist ~~Äquivalenz~~ symmetrisch
- $\forall n, n' \in \mathbb{N}$ gilt $n S n'$ oder $n' S n$ oder $n' = n$

② Beweise: S ist transitiv.

③ Beweise: M, N, T Mengen, dann $M \cap (N \cup T) \subset (M \cap N) \cup (M \cap T)$

<u>Lösung</u>: ①(i) wahr, siehe Beispiele (ii) $[0]_R, [1]_R, [2]_R$ sind die einzigen Äquivalenzklassen.

(iii) falsch $3 \mid 6$, aber $6 \nmid 3$. (iv) falsch. Es gilt weder $2 \mid 3$ noch $3 \mid 2$ noch $2 = 3$.

② nSn' und $n'Sm$, dann teilt n n' und n' teilt m. Dann teilt n auch m.

Also nSm.

③ $x \in M \cap (N \cup T) \Rightarrow x \in M$ und $x \in (N \cup T) \Rightarrow x \in M$ und ($x \in N$ oder $x \in T$)

$\Rightarrow$ ($x \in M$ und $x \in N$) oder ($x \in M$ und $x \in T$) $\Rightarrow x \in M \cap N$ oder $x \in M \cap T$

$\Rightarrow x \in (M \cap N) \cup (M \cap T)$