Tutorium 3

Nachtrag: Hausaufgabe 3:

Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe, $U \subseteq G$ mit
$e \in U$ und $\forall x \in U \, \forall y \in U \;\; x \circ y^{-1} \in U$.

(i) $(U, \circ\restriction_{U \times U})$ ist eine Gruppe

Beweis: Das neutrale Element e aus G liegt in U und ist auch neutrales Element in U, da $e \in U$ und $\forall x \in U \;\; xe = x$

Da $e \in U$, gilt $\forall y \in U \quad \underbrace{e \circ y^{-1}}_{\in U} = y^{-1}$

$\Rightarrow \forall y \in U \; \exists z \in U : \; yz = e$.

Assoziativität folgt direkt aus der Assoziativität von G. $\boxtimes$

(ii) Es gibt kommutative und nicht kommutative Gruppe.

Beweis $(\mathbb{Z}, +)$ ~~ist~~ ist kommutativ

$(GL_n(k), \circ)$ ist nicht kommutativ, z.B. für $k = \mathbb{R}$, $n = 2$

Die Menge aller invertierbaren $n \times n$-Matrix über k $\boxtimes$

Übung: Finde zwei 2×2-Matrizen A, B über $\mathbb{R}$, so dass $A \circ B \neq B \circ A$.

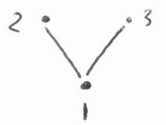
Verbände

(1) Partielle Ordnung als Diagramme.

Sei $(P, \leq_P)$ ein partielle Ordnung. In einen Diagram von P wird jedes Element p von P als Punkt x_p von unserem Diagram dargestellt. Wir verbinden zwei Punkte x_p und x_q, falls $p \leq_P q$ und es kein r gibt mit $p \leq_P r \leq_P q$.

Wir lassen also die „Transitivitäten" weg.

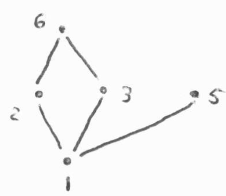
Beispiel: (i) $P = \{1, 2, 3\}$ $\quad \leq_P = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (1,3)\}$



(iv) $P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$xRy \Leftrightarrow x \mid y$

(ii) $(P, \leq)$

(iii) $(P, =)$

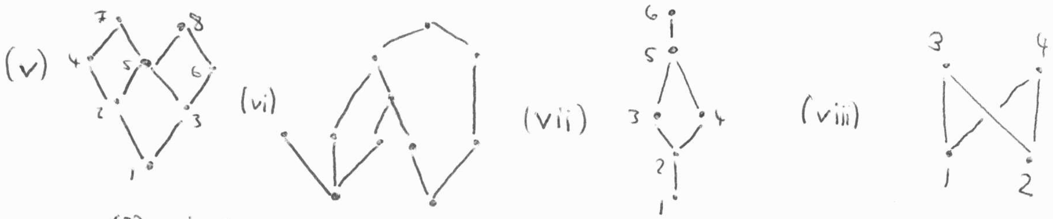


Umgekehrt kann man aus ein Diagram eine Relation erhalten:

Sei $D = (K, E)$, wobei K für die Punkte steht und E für alle Kanten zwischen den Punkten.

$x, y \in K$ $\quad x R y \iff \exists e \in E$ e ist Kante zwischen x und y.

Wir können als sehr einfach neue Relation kreieren:



(2) inf und sup

<u>Def</u> Sei $(P, \leq_p)$ eine partielle Ordnung, $a, b \in P$

(i) wir sagen „a und b haben ein Infimum", falls

$$\exists x \in P \text{ mit } (x \leq_p a \wedge x \leq_p b) \wedge (\forall z \in P : (z \leq_p a \wedge z \leq_p b) \rightarrow z \leq_p x)).$$

(ii) wir sagen „a und b haben ein Supremum", falls

$$\exists x \in P \text{ mit } (x \geq_p a \wedge x \geq_p b) \wedge (\forall z \in P : (z \geq_p a \wedge z \geq_p b) \rightarrow z \geq_p x))$$

Falls a und b ein $\begin{cases}\text{Infimum}\\\text{Supremum}\end{cases}$ haben, nennen wir das x in $\begin{cases}*\\**\end{cases}$ das $\begin{cases}\text{Infimum}\\\text{Supremum}\end{cases}$ von x.

<u>Bem</u> Anschaulich ist das Infimum von a und b, <u>falls</u> es existiert das „größte" Element, welches kleiner als a <u>und</u> kleiner als b ist.
Umgekehrt ist das Supremum von a und b, <u>falls</u> es existiert das „kleinste" Element welches größer als a <u>und</u> größer als b ist.

<u>Beispiel</u>: (i) Betrachte (i) aus vorherigen Beispiel:

- Existiert ein Infimum von 3 und 2?

a) Welche Element sind $\leq_p$-kleiner als 3 und 2? Nur 1 ist $\leq_p$-kleiner als 3 und 2.

b) Unter diesen Element ist, welches $\leq_p$ maximal? Auch 1, schließlich gibt es kein anderes!

Also ist 1 $\leq_p$-Infimum von 2 und 3.

- Existiert ein Supremum von 3 und 2?

a) Welche Elemente sind $\leq_p$-größer als 2 <u>und</u> 3? Keine!

Also existiert kein Supremum von 3 und 2.

- Existiert ein Supremum von 3 und 1?

a) Welche Elemente sind $\leq_p$-größer als 1 und 3? $3 \geq_p 3$ und $3 \geq_p 1$, Also nur 3.

Also ist 3 Supremum von 3 und 1.

- Existiert ein Infimum von 3 und 1?
  a) Welche Elemente sind $\leq_p$-kleiner als 1 und 3? Nur die 1!
  Also ist 1 Infimum von 1 und 3.

(ii) Betrachte (iv) aus vorherigem Beispiel:
Supremum von 2 und 3? Nur 6 ist $\leq_p$-größer als ~~...~~ 2 und 3. Also $6 = \sup\{2,3\}$
Supremum von 5 und 3? Existiert nicht, da kein Element von P $\leq_p$-größer ist als 3 und 5.

(iii) Betrachte (vii) aus vorherigem Beispiel:
Supremum von 3 und 4?
a) Welche sind größer? 5, 6 sind größer als 3 und 4.
b) Hat diese Menge $\{5,6\}$ ein Minimum bzgl die Ordnung? Ja, 5 ~~...~~ ist Minimum, da $5 \leq 6$.

<u>Übung</u> Zeige, Infimum von 3 und 4 ist 2.

(iv) Betrachte (v) aus vorherigem Beispiel:
Supremum von 2 und 3?
a) $5 \geq_p 2$ und $5 \geq_p 3$. Aussердem $7 \geq_p 2$ und $7_p \geq 3$ und $8 \geq_p 2$ und $8 \geq_p 3$.
<u>Achtung</u>: $4 \not\geq_p 3$ und $6 \not\geq_p 2$.
Damit ist $\{x \mid x \geq_p 2 \text{ und } x \geq_p 3\} = \{5, 7, 8\}$
b) Was ist das Minimum von $\{5, 8, 7\}$? Die 5, da $5 \leq_p 8$ und $5 \leq_p 7$.
Also ist $5 = \sup\{2,3\}$.
Aber achtung! Nicht immer existieren Minima oder ~~Suprema~~ Maxima:
(v) Betrachte (viii) aus vorherigem Beispiel:
$\inf(3,4)$?
a) $1 \leq_p 3$ und $1 \leq_p 4$. Ausserdem $2 \leq_p 3$ und $2 \leq_p 4$.
b) Maximum von $\{1,2\}$? Existiert <u>nicht</u>, da $1 \not\leq_p 2$ und $2 \not\leq_p 1$.

(vi) $M := \{\{1,2\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,5\}\}$ $\quad x \leq_M y \Leftrightarrow x \subseteq y$.
Infinum von $\{1,2,3,4\}$ und $\{1,2,3,5\}$?
$\{1,2\} \leq_M \{1,2,3,4\}$ und $\{1,2\} \leq_M \{1,2,3,5\}$.
Sonst gibt es kein $x \in M$ mit $x \leq_M \{1,2,3,4\}$ und $x \leq_M \{1,2,3,5\}$
Also ist $\inf(\{1,2,3,4\}, \{1,2,3,5\}) = \{1,2\}$

Def Ein partielle Ordnung $(P, \subseteq)$ heißt Verband, falls
$\forall x \in P \forall y \in P$ das Supremum von x und y existiert und das Infimum von x und y existiert.

Beispiel Aus den erstem Beispiel sind (ii) und (vii) Verbände. Die anderen nicht.

Testat

1) $M := \{ \{1,2,3\}, \{2,3,4,5\}, \{4,3\}, \{3\} \}$, $x \leq_M y :\Leftrightarrow x \subseteq y$
$N := \mathbb{N}$ $\qquad x \leq_N y :\Leftrightarrow x | y$.

Wahr oder falsch?

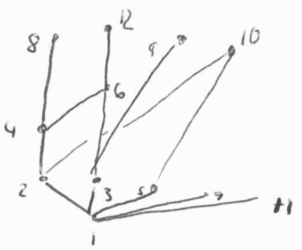
☐ $\{4,3\} = \inf(\{1,2,3\}, \{2,3,4,5\})$ in $(M, \leq_M)$
☐ $\{4,3\} = \sup(\{4,3\}, \{3\})$ in $(M, \leq_M)$
☐ $\{2,3,4,5\} = \sup(\{4,3\}, \{1,2,3\})$ in $(M, \leq_M)$
☐ $\forall n, n' \in N \quad \inf(n, n') = ggT(n, n')$

2) Zeichne das, zu $P := \{1,2,3,\dots,12\}$ und $x \leq_P y :\Leftrightarrow x|y$ gehörige, Diagram.

3) Beweise: Sei X Menge und $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X, dann definiert $\subseteq$ eine transitive Relation auf $\mathcal{P}(X)$.

Lösung: 1) a) falsch $\{4,3\} \not\leq_M \{1,2,3\}$
b) richtig
c) falsch $\{1,2,3\} \not\leq_M \{2,3,4,5\}$
d) richtig

2)



3) z.z. $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$
$x \in A \Rightarrow x \in B$, da $A \subseteq B$
$\Rightarrow x \in C$, da $B \subseteq C$
$\Rightarrow A \subseteq C$