Nachtrag

Aufgabe 6a: V Vektorraum, $U \subset V$ Untervektraum, für $v, v' \in V$

$$v + U + v' + U := (v+v') + U.$$

Zz gegeben $v, v', v'', v''' \in V$ mit $v + U = v'' + U$ und $v' + U = v''' + U$,
dann $(v+v') + U = (v' + v'') + U$

Beweis: Falls $v + U = v'' + U$, dann $v'' \in v + U$, also $v'' = v + u$ für ein $u \in U$
Genauso, $v''' + u' = v'$ für $u' \in U$.

"$\subseteq$" Sei $w \in (v+v') + U$, dann gibt es $u'' \in U$ mit $w = v + v' + u''$.

Dann $w = v'' - u + v''' - u' + u''' = v'' + v''' + (\underbrace{u''' - u'' - u'}_{\in U})$

Also ist $w \in (v''' + v'') + U$.

"$\supseteq$" Sei $w \in (v'' + v''') + U$, dann gibt es $u'' \in U$ mit $w = v'' + \cancel{v'''} + u''$.

Dann $w = v + u + v' + u' + u'' = v + v' + (u + u' + u'')$.

Also ist $w \in (v + v') + U$

Übung Teil 2 der Aufgabe.

Boolsche Algebren

Def Eine Boolsche Algebra $(B, +, \cdot, -, 0, 1)$ besteht aus einer Menge B, einer Funktion $+ : B \times B \to B$, einer Funktion $\cdot : B \times B \to B$, einer einstelligen Funktion $- : B \to B$ und zwei Elementen $0, 1 \in B$, die gewissen Regeln erfüllen.

z.B (i) $\forall x$ $0 + x = x$ $1 \cdot x = x$

(ii) $\forall x, y, z$ $x \cdot (y+z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$
und $x + (y \cdot z) = (x+y) \cdot (x+z)$

(iii) $\forall x$ $x + (-x) = 1$ und $x \cdot (-x) = 0$

(iv) $\forall x$ $-(-x) = x$

(v) $\forall x, y$: $-(x \cdot y) = (-x) + (-y)$
und $-(x+y) = (-x) \cdot (-y)$

Für die restlichen Regeln siehe Vorlesung.

Bsp: (i) $B = \{0,1\}$ $x,y \in B$

$$x+y := x \vee y$$
$$x \cdot y := x \wedge y$$
$$-x := \neg x = \overline{x}$$

Unsere Regel werden dann zu den bekannte Regeln der Aussagenlogik. Deren Korrektheit können wir mittels Wahrheitstafel beweisen:

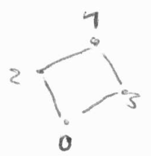
z.B. $-(x \cdot y) = (-x)+(-y)$

i.a.W. $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$

$\overline{x\wedge y}$	0	1
0	1	1
1	1	0

$\overline{x} \vee \overline{y}$	0	1
0	1	1
1	1	0

(ii) $B = \{0,1,2,3\}$



$\wedge$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	2	0
3	0	3	0	3

$\vee$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	1	1	1
2	2	1	2	1
3	3	1	1	3

$\neg$	0	1	2	3
	1	0	3	2

Beweise nun: $-(x+y) = (-x)\cdot(-y)$.

$-(x+y)$	0	1	2	3
0	1	0	3	2
1	0	0	0	0
2	3	0	3	0
3	2	0	0	2

$(-x)(-y)$	0	1	2	3
0	1	0	3	2
1	0	0	0	0
2	3	0	3	0
3	2	0	0	2

(iii) X Menge, dann ist $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap, X\setminus, \emptyset, X)$ boolsche Algebra.

Beweis z.B.: $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$

Dafür siehe Tutorium 1.

Wir definieren nun weitere Operation auf boolesche Algebren:

Sei $(\mathbb{B},+,\cdot,-,0,1)$ boolesche Algebra, $x,y\in\mathbb{B}$

(i) $x\leq y$, genau dann wenn $x\cdot(-y)=0$

(ii) $x\Rightarrow y:\equiv(-x)+y$

(iii) $x \text{ XOR } y:\equiv(x\cdot(-y))+(y\cdot(-x))$

(iv) $HA(x,y):\equiv(x \text{ XOR } y\ ,\ x\cdot y)$

Beispiel: (i) Betrachte (ii) aus vorherigem Beispiel, also $B=\{0,1,2,3\}$,
dann ist $0\leq 0$, $0\leq 2$, $0\leq 3$, $0\leq 1$, $2\leq 1$, $3\leq 1$, $1\leq 1$.

$x\Rightarrow y$	0	1	2	3
0	1	1	1	1
1	0	1	2	3
2	3	1	1	3
3	2	1	2	1

$$2 \text{ XOR } 3\equiv(2\cdot 2)+(3\cdot 3)$$
$$\equiv 2+3\equiv 1$$

HA(x,y):
$$HA(2,3)=(1\ ,\ 0)$$

(iii) Betrachte Beispiel (iii) von vorherigem Beispiel, also $B=\mathcal{P}(X)$,
dann gilt $x\leq y$, genau dann wenn $x\subseteq y$.

Beweis "$\Rightarrow$" $z\in x$. Angenommen $z\notin y$, dann $z\in x\cap X\setminus y$.
Aber $x\cdot(-y)=\emptyset$. Also $z\notin x\cap X\setminus y$. Widerspruch.
Also $z\in y$.

"$\Leftarrow$" zz $x\cdot(-y)=0$

$x\cdot(-y)=x\cap X\setminus y\subseteq y\cap X\setminus y=\emptyset$.

Also $x\cdot(-y)\subseteq\emptyset \Rightarrow x(-y)=\emptyset$.

$\boxtimes$

Wir wissen von Übungsblatt 1,

$$M\subseteq N \quad \text{gdw.} \quad M\cap N=M.$$

Dies gilt auch in allgemeinen Boolesche Algebren.

Satz $\mathbb{B}$ boolesche Algebra, $x, y \in \mathbb{B}$,

$$x \leq y \quad \text{gdw.} \quad x \cdot y = x.$$

Beweis: "$\Longrightarrow$" zz $x \cdot y = x$

$$x = x \cdot 1 = x \cdot (y + (-y)) = (x \cdot y) + (x \cdot (-y)) \overset{x \cdot (-y) = 0}{=} (x \cdot y) + 0 = x \cdot y$$

"$\Longleftarrow$" zz $x \cdot (-y) = 0$

$$x \cdot (-y) \underset{\text{da } x \cdot y = x}{=} (x \cdot y) \cdot (-y) = x \cdot (y \cdot (-y)) = x \cdot 0 = 0$$

$\boxtimes$

Übung $x \leq y$ gdw $x + y = y$.

Testat

(1) Sei $\mathbb{B} = \{0, 1, 2, 3\}$ mit den oben definierten Operationen.

Wahr oder falsch?

(i) $1 \text{ XOR } 2 = 1$ in $\mathbb{B}$

(ii) $2 \Rightarrow 3 = 2$ in $\mathbb{B}$

(iii) $2 \leq 3$ in $\mathbb{B}$

(iv) $HA(3,2) = (1,0)$ in $\mathbb{B}$

(2) Schreibe die Tabelle für $\neg(x \cdot y)$ in $\mathbb{B}$ auf.

(3) Betrachte $M := \{\{1\}, \{2\}, \{1,3\}, \{2,4\}, \{1,3,5,9\}, \cancel{\{1,2,3,4\}}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,6,7,8\}, \{1,3,5,8,10\}, \{1,2,3,4,6,7,8\}\}$ geordnet bzgl. $\subseteq$.

Zeichne den Graphen für die partielle Ordnung und bestimme $\inf(\{1,3,5,8,10\}, \{1,3,5,9\})$ und $\sup(\{1,3\}, \{2,4\})$, falls diese existieren.

Lösung: (1) (i) $1 \text{ XOR } 2 = (1 \wedge 3) \vee (0 \wedge 2) = 3$

(ii) $2 \Rightarrow 3 = 3$ s. Tabelle

(iii) $2 \cdot (-3) = 2$

(iv) $HA(3,2) = (2 \text{ XOR } 3, 2 \wedge 3) = (1, 0)$

2)

$\neg(x \cdot y)$	0	1	2	3
0	1	1	1	1
1	1	0	3	2
2	1	3	3	1
3	1	2	1	2

3)

$\sup(\{1,3\}, \{2,4\}) = \{1,2,3,4\}$

$\inf\{\{1,3,5,8,10\}, \{1,3,5,9\}\} = \{1,3\}$