Tutorium 5

Signaturen

Def Eine Signatur ist ein 5-Tupel $\sigma = (S, F, R, K, fct)$, wobei
- S, F, R, K paarweise disjunkte Mengen,
- $fct : F \cup R \cup K \longrightarrow \bigcup_i S^i$, wobei für $k \in K$ $fct(k) \in S$.

Was ist eine Signatur?

Elemente in S sind Namen für alle vorkommenen Sorten.
— " — F ——— " ——— Funktionen.
Elemente in R ——— " ——— Relationen.
— " — K ——— " ——— Konstanten.

fct weißt jeder Funktion seinen „Werte- und Definitions" bereich zu,
Relation seinen „Definitionsbereich"
Kostante ihre Sorte zu.

Beispiel: (i) $S = \{1\}$, $F = \emptyset$, $R = \{2\}$, $K = \emptyset$,
$fct : \{2\} \longrightarrow \bigcup_i S^i$
$2 \longmapsto (1,1) \in S^2$.

Hier haben wir also einen Namen für Sorte und für eine Relation auf dieser Sorte.

(ii) $S = \{a, b\}$, $F = \{c\}$, $R = \{d, e\}$, $K = \emptyset$.
$fct : \{c, d, e\} \longrightarrow \bigcup_i S^i$
$c \longmapsto (a, b)$
$d \longmapsto (a, b)$
$e \longmapsto (a, a)$

c ist also ein Name für eine „Funktion von a nach b".
d Name für „Relation auf a und b" (2-stellig)
e Name für Relation auf a (2-stellig)

Struktur

Def Für eine Signatur $\sigma = (S, F, R, K, fct)$ ist eine σ-Struktur ein Tupel
$$\mathfrak{A} = \left((A_s)_{s \in S}, (f^{\mathfrak{A}})_{f \in F}, (r^{\mathfrak{A}})_{r \in R}, (k^{\mathfrak{A}})_{k \in K}\right), \text{ so dass}$$
a) $\forall f \in F$ $\quad f^{\mathfrak{A}} : A_{s_0} \times \dots \times A_{s_{n-1}} \longrightarrow A_{s_n}$ für $fct(f) = (s_0, \dots, s_n)$
b) $\forall r \in R$ $\quad r^{\mathfrak{A}} \subseteq A_{s_0} \times \dots \times A_{s_n}$ für $fct(r) = (s_0, \dots, s_n)$
c) $\forall k \in K$ $\quad k^{\mathfrak{A}} \in A_s$ für $fct(k) = s$.

Das heißt: „wir weisen jedem Namen ein echtes Gegenstück zu."

Beispiel (i) Sei σ wie in (i) des letzten Beispiels:
a) $A_1 := \mathbb{N}$ $\quad r_2 := <$
b) $A_1 := \mathbb{N}$ $\quad r_2 := |$
c) $A_1 := \{\text{Menschen}\}$ $\quad r_2 := \{(a, b) \mid a \text{ jünger als } b\}$

d) $A_1 := \{\text{Autos}\}$ $\qquad r_2 := \{(a,b) \mid a \text{ und } b \text{ haben gleiche Farbe}\}$

(ii) Sei σ wie in (i) des letzten Beispieles:

a) $A_a := \mathbb{N}$ $\qquad A_b := \mathbb{Q}$

$f_c : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ $\qquad r_d : n\, r_d\, q :\Leftrightarrow \frac{n}{2} = q$

$n \mapsto \frac{n}{2}$ $\qquad r_e : n\, r_e\, n' \Leftrightarrow n \leq n'$

b) $A_1 := \{\text{Männer}\}$ $\qquad A_2 := \{\text{Frauen}\}$

$f_c : \{\text{Männer}\} \to \{\text{Frauen}\}$

$m \mapsto \text{Mutter von } m$

$r_d :$ $\quad m\, r_d\, n :\Leftrightarrow m$ verheiratet mit n

$r_e :$ $\quad m\, r_e\, m :\Leftrightarrow m$ ist jünger als m.

Struktur $\Rightarrow$ Signatur

Sei eine Struktur gegeben, dann wir daraus auf die Signatur schließen.

Beispiel (i) $(\mathbb{N}, \leq, +)$: $\quad S = \{1\}$ $\quad R = \{2\}$ $\quad F = \{3\}$ $\quad fct(2) = (1,1)$ $\quad fct(3) = (1,1)$

(ii) $(\{\text{Menschen}\}, \{\text{Auto}\}, \mathbb{N}, m \text{ Besitzt } a, \text{Baujahr}, \text{Besitzer})$

$S = \{1,2,3\}$ $\quad F = \{5,6\}$ $\quad fct(4) = (1,2)$

$R = \{4\}$ $\quad fct(5) = (2,3)$

$fct(6) = (2,1)$

Substrukturen

Def $\sigma = (S, F, R, K, fct)$ Signatur und

$\mathfrak{A} = ((A_s)_{s\in S}, (f^{\mathfrak{A}})_{f\in F}, (r^{\mathfrak{A}})_{r\in R}, (k^{\mathfrak{A}})_{k\in K})$

und $\mathfrak{B} = ((B_s)_{s\in S}, (f^{\mathfrak{B}})_{f\in F}, (r^{\mathfrak{B}})_{r\in R}, (k^{\mathfrak{B}})_{k\in K})$ $\quad \sigma$-Struktur.

$\mathfrak{B}$ ist Substruktur von $\mathfrak{A}$ falls

a) $\forall s \in S \quad B_s \subseteq A_s$

b) $\forall f \in F \quad f^{\mathfrak{A}}|_{B_{s_0} \times \ldots B_{s_{n-1}}} = f^{\mathfrak{B}}$, wobei $fct(f) = (s_0, \ldots, s_n)$

c) $\forall r \in R \quad b_0 \in B_{s_0}, \ldots, b_n \in B_{s_n}$

$r^{\mathfrak{B}}(b_0, \ldots, b_n)$ gdw. $r^{\mathfrak{A}}(b_0, \ldots, b_n)$, wobei $fct(r) = (s_0, \ldots, s_n)$

d) $k \in K \quad k^{\mathfrak{A}} = k^{\mathfrak{B}}$

Wir schreiben dann $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$.

Beispiel (i) Sei σ wie im ersten Beispiel (i),
$\mathcal{A} := (i)(c)$ aus vorherigem Beispiel ist σ-Struktur.
$A_1 := \{\text{Männer}\}$ $\quad r_2 = \{(a,b) \mid (a,b \text{ Männer}) \text{ und } a \text{ jünger als } b\}$
$\mathcal{B} := \{A_1 ; r_2\}$

$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, also $\mathcal{B}$ Substruktur von $\mathcal{A}$.

(ii) $\mathcal{A} := (i)(b)$ aus vorherigen Beispiel
$\mathcal{B} := (i)(a)$ aus vorherigen Beispiel.

$\mathcal{B}$ ist keine Substruktur von $\mathcal{A}$ und
$\mathcal{A}$ ist keine Substruktur von $\mathcal{B}$.

Homomorphismen

Def: Sei $\sigma = (S, F, R, K, Sct)$ eine Signatur, seien
$$\mathfrak{A} = ((A_s)_{s\in S}, (f^A)_{f\in F}, (r^A)_{r\in R}, (k^A)_{k\in K})$$
und
$$\mathcal{B}\ ((B_s)_{s\in S}, (f^B)_{f\in F}, (r^B)_{r\in R}, (k^B)_{k\in K})$$
σ-Strukturen, so dass $\exists s \forall s' \in S\setminus\{s\}\ A_{s'} = B_{s'}$.

Eine Abbildung $h_s : A_s \longrightarrow B_s$ heißt Homomorphismus,
falls a) $\forall f \in F$, $Sct(f) = (s_0, \dots, s_{n-1}, s_n)$, $\forall a_0 \in A_{s_0} \dots \forall a_{n-1} \in A_{s_{n-1}}$
$$f^B(h_{s_0}(a_0), \dots, h_{s_{n-1}}(a_{n-1})) = h_{s_n}(f^A(a_0, \dots, a_{n-1}))$$
b) $\forall r \in R$, $Sct(r) = (s_0, \dots, s_n)$, $\forall a_0 \in A_{s_0} \dots \forall a_{n-1} \in A_{s_{n-1}}$ ist
$$r^B(h_{s_0}(a_0), \dots h_{s_n}(a_n)) \text{ gdw } r^A(a_0, \dots, a_{n-1})$$
c) $\forall k \in K$ $\quad Sct(k) = s_0$,
$$k^B = h_{s_0}(k^A) \quad ,$$
wobei $h_{s'} : A_{s'} \to B_{s'} = Id_{A_{s'}}$ für $s' \neq s$.

Beispiel: (i) σ Signatur aus (i) aus erstem Beispiel,
$A_1 := \{\text{Männer}\}$ $\quad R_2^A := \{(a,b) \mid a \text{ jünger als } b\}$
$B_1 := \{\text{Menschen}\}$ $\quad R_2^B := \{(a,b) \mid a \text{ jünger als } b\}$
$$h : A_1 \hookrightarrow B_1 \quad \text{ist Homomorphismus.}$$
$$m \longmapsto m$$

(ii) Erweitere Beispiel (i) wie folgt:

$\sigma := (\{1,4\}, \{3\}, \{2\}, \emptyset\})$ fct)

$A_1 := \{\text{Männer}\}$ $A_4 := \mathbb{N}$ $f_3^A : A_1 \to A_4$

$m \mapsto$ Alter von m

$r_2^A \subseteq A_1 \times A_1$ $m r_2^A m' :\Leftrightarrow m$ jünger als m'

$B_1 := \{\text{Menschen}\}$ $B_2 := \mathbb{N}$ $f_3^B : A_1 \to A_4$

$m \mapsto$ Alter von m

$r_2^B \subseteq A_1 \times A_1$ $m r_2^B m' \Leftrightarrow m$ jünger m'

$h : A_1 \hookrightarrow B_1$ ist Homomorphismus.

(iii) σ wie in (ii):

$\mathcal{A}$ wie in (ii); $\mathcal{B} := \mathcal{A}$

~~$\mathcal{B}$~~ ~~B_1~~ $h : A_1 \to B_1$

$m \mapsto$ Vater von m.

h ist kein Homomorphismus,

da m jünger als m' $\not\Rightarrow$ Vater von m ist jünger als Vater von m'.

Testat

Lösung: 1) i) wahr. $n \le n' \Leftrightarrow 2^n \mid 2^{n'}$

ii) wahr. $2^i \le 2^{i'} \Leftrightarrow 2^i \mid 2^{i'}$.

iii) falsch. $2\,\mathrm{id}(n) \ne 2 \cdot 2 \cdot n$

iv) falsch. $2n \ne n$.

2) $\sigma = (\{1\}, \{2,3\}, \{4,5\}, \{6,7\}, (2 \mapsto (1,1), 3 \mapsto (1,1), 4 \mapsto (1,1), 5 \mapsto (1,1), 6 \mapsto 1, 7 \mapsto 1))$

3) $x + y = x \cdot y + y = x \cdot y + 1 \cdot y = (x+1) y = y$.