1. Tutorium 7

Vorraussetzung: Vorlesung/Skript Definition 4.1 und Definition 4.4, also die Definition von Termen, Aussagen und Modellen

1.1. **Termen und Aussagen.**

Beispiel 1.1. *Sei* $\sigma = (\{s\}, \{f_1, f_2\}, \{r_1\}, \{c, k\}, (f_1 \to (s, s), f_2 \to (s, s, s), r_1 \to (s, s), c \to (s), k \to (s)\}$ *ein Signatur, dann sind* $t_1 = f_2(f_1(v_5^s), v_6^S)$ *und* $t_2 = f_1(f_2(f_1(v_2^s), v_3^s))$ *Beispiele für* σ*-Terme.*

Werden nun Terme mittels = oder mit Relation verknüpft, dann erhält man relationale Aussagen.

Beispiel 1.2. *Sei* σ, t_1, t_2 *wie Beispiel 1.1, dann sind* $\varphi_1 := t_1 = t_2$ *und* $\varphi_2 := r_1(t_2, t_1)$ *Beispiele für relationale Aussagen über* σ*.*

Verknüpfen wir nun die relationen Aussagen mittels logischer Verknüpfung erhalten wir beliebige Aussagen.

Beispiel 1.3. *Sei* $\sigma, \varphi_1, \varphi_2$ *wie Beispiel 1.2, dann sind* $\psi_1 := \varphi_1 \wedge \varphi_2$ *oder* $\psi_2 := \exists v_3^s \varphi_2$ *Beispele für Aussagen. Aber natürlich sind auch zum Beispiel* $\psi_2 \wedge \varphi_2$ *und* $\exists v_2^s \psi_1$ *Aussagen!*

1.2. **Modelle.** Wir wollen nun Formeln und Terme in Modelle interpretieren. Betrachten wir nun also $\mathcal{M} = (\mathcal{A}, \beta)$, ein σ-Modell, wobei σ wie in Beispiel 1.1.

Sei $A_s = \mathbb{N}$, $f_1^{\mathcal{A}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, x \to x^2$, $f_2^{\mathcal{A}} = +_{\mathbb{N}}$, $r_2^{\mathcal{A}}$ die kleiner-Relation auf $\mathbb{N}$ und $c^{\mathcal{A}} = 1$,$k^{\mathcal{A}} = 1$. Weiterhin sei $\beta(v_n^s) = 3n$.

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(t_1) &= \mathcal{M}(f_2(f_1(v_5^s), v_6^S)) \\
&= f_2^{\mathcal{A}}(\mathcal{M}(f_1(v_5^s)), \mathcal{M}(v_6^s)) \\
&= f_2^{\mathcal{A}}(\mathcal{M} f_1(v_5^s), 18)) \\
&= f_2^{\mathcal{A}}(f_1^{\mathcal{A}}(\mathcal{M}(v_5^s)), 18)) \\
&= f_2^{\mathcal{A}}(f_1^{\mathcal{A}}(15), 18)) \\
&= f_2^{\mathcal{A}}(225, 18)) \\
&= 243.
\end{aligned}$$

Aufgabe 1.4. *Zeige, dass* $\mathcal{M}(t_2) = 2025$*. Und dass für alle* $a \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$(\mathcal{A}, \beta[\frac{a}{v_3^s}])(t_2) = (36 + a)^2.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} \models \varphi_2 \text{ gdw. } & \mathcal{M} \models r_1(t_2, t_1) \\
\text{gdw. } & r_1^{\mathcal{A}}(t_2^{\mathcal{A}}, t_1^{\mathcal{A}}) \\
\text{gdw. } & r_1^{\mathcal{A}}(2025, 243) \\
\text{gdw. } & 2025 < 243.
\end{aligned}$$

Also ist $\mathcal{M}$ kein Modell von φ_2.

Aufgabe 1.5. *Zeige, dass $\mathcal{M}$ kein Modell für φ_1 ist.*

Wir definieren $\varphi_3 := \neg\varphi_2$. Dann gilt $\mathcal{M} \models \varphi_3$ (Übung: Beweise das!).

Frage: Gilt in unserem Modell denn ψ_2?

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} \models \psi_2 \text{ gdw. } & \mathcal{M} \models \exists v_3^s \psi_2 \\
\text{gdw. } & \mathcal{M} \models \exists v_3^s r_1(t_2, t_1) \\
\text{gdw. } & \exists a \in \mathbb{N}(\mathcal{A}, \beta[\frac{a}{v_3^s}]) \models r_1(t_2, t_1) \\
\text{gdw. } & \exists a \in \mathbb{N} r_1^{\mathcal{A}}((\mathcal{A}, \beta[\frac{a}{v_3^s}])(t_2), (\mathcal{A}, \beta[\frac{a}{v_3^s}])(t_1)) \\
\text{gdw. } & \exists a \in \mathbb{N}(\mathcal{A}, \beta[\frac{a}{v_3^s}])(t_2) < (\mathcal{A}, \beta[\frac{a}{v_3^s}])(t_1) \\
\text{gdw. } & \exists a \in \mathbb{N}(\mathcal{A}, \beta[\frac{a}{v_3^s}])(t_2) < 243 \\
\text{gdw. } & \exists a \in \mathbb{N}(36 + a)^2 < 243.
\end{aligned}$$

Da aber $36^2 > 243$ ist $\mathcal{M}$ auch kein Modell von ψ_2.

Können wir ein σ-Modell $\mathcal{N}$ finden, für dass gilt $\mathcal{N} \models \varphi_2$?

Ja. Sei die σ-Struktur $(\mathcal{B}, \gamma)$ gegeben durch $\mathcal{B}_s = \mathbb{N}, f_1^{\mathcal{B}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, x \mapsto 2, f_2^{\mathcal{B}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, (x, y) \mapsto x, r_1$ sei die kleiner-gleich-Relation auf $\mathbb{N}$. Weitherhin sei $\gamma(v_n^s) = n$. Definiere $\mathcal{N} := (\mathcal{B}, \gamma)$.

Aufgabe 1.6. *Beweise: $\mathcal{N} \models \varphi_2$.*

2. Testat

Sei $\sigma_1 = (\{s\}, \{f_1, f_2\}, \{r_1, r_2\}, \emptyset, (f_1 \to (s, s), f_2 \to (s, s, s), r_1 \to (s, s), r_2 \to (s, s))\}$ ein Signatur, sei $\mathcal{M} = (\mathcal{A}, \beta)$ ein σ_1-Modell mit

- $\mathcal{A}_s = \mathbb{N}$,
- $f_1^{\mathcal{A}} = Id_{\mathbb{N}}$ und $f_2^{\mathcal{A}} = +_{\mathbb{N}}$,
- $r_1^{\mathcal{A}} = <_{\mathbb{N}}$ und $r_2^{\mathcal{A}} = |_{\mathbb{N}}$,
- $\beta(v_n^s) = n$.

Aufgabe 2.1. *Wahr oder falsch?*

- $\mathcal{M} \models v_5^s = v_{12}^s$.
- $\mathcal{M} \models \exists v_6^s\ v_5^s = v_{12}^s$.
- $\mathcal{M} \models \exists v_6^s\ v_6^s = v_{112}^s$
- *Für alle Aussage $\varphi \in Aus^{\sigma_1}$: $\mathcal{M} \models \varphi \vee \neg\varphi$.*

Lösung: (i) falsch, da $\mathcal{M} \models v_5^s = v_{12}^s$ gdw. $5 = 12$.
(ii) falsch, da $\mathcal{M} \models \exists v_6^s\ v_5^s = v_{12}^s$ gdw. $5 = 12$.
(iii) wahr, da $\mathcal{M} \models \exists v_6^s\ v_6^s = v_{12}^s$ gdw. $\exists a \in \mathbb{N}\ a = 12$.
(iv) wahr, da $\mathcal{M} \models \varphi \vee \neg\varphi$ gdw. $\mathcal{M} \models \varphi$ oder nicht $\mathcal{M} \models \varphi$.

Aufgabe 2.2. *Beweise oder widerlege: $\mathcal{M} \models r_1(f_1(v_6^s), v_7^s) \wedge r_2(f_2(v_6^s, v_6^s), v_6^s)$.*

Lösung: $\mathcal{M} \models r_1(f_1(v_6^s), v_7^s) \wedge r_2(f_2(v_6^s, v_6^s), v_6^s)$ gdw. $6 < 7$ und $12|6$.

Aufgabe 2.3. *Bestimme ein σ_1-Modell $\mathcal{S}$ mit $\mathcal{S} \models f_1(v_1^s) = v_2^s$.*

Lösung: Z.B. $\mathcal{S} = (\mathcal{A}, \gamma)$, wobei für alle $n \in \mathbb{N}$, $\gamma(v_n^s) := 1$.