

## 1. TUTORIUM 8 - BESPIELE FORMALER BEWEISE

Hausaufgabe 21 b:  $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$ .

- 1:  $[\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$  Einführen einer Annahme
- 2:      $[\psi$  Einführen einer Annahme
- 3:      $[\varphi$  Einführen einer Annahme
- 4:          $\psi \rightarrow \chi$   $\rightarrow$ -Elimination mit 3 und 1
- 5:          $\chi]$   $\rightarrow$ -Elimination mit 2 und 4
- 6:      $\varphi \rightarrow \chi]$
- 7:  $\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)]$

Modus ponens:  $(\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow \psi$ .

- 1:  $[\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi)$  Einführen einer Annahme
- 2:      $\varphi$   $\wedge$ -Elimination mit 1
- 3:      $(\varphi \rightarrow \psi)$   $\wedge$ -Elimination mit 1
- 4:      $\psi]$   $\rightarrow$ -Elimination mit 2 und 3

Beispiel:  $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$ .

- 1:  $[\varphi$  Einführen einer Annahme
- 2:  $[\psi$  Einführen einer Annahme
- 3:  $\varphi]$  Kopie von 1
- 4:  $\psi \rightarrow \varphi$

Klausuraufgabe, Nachklausur SS 04, Aufgabe 4:  $\neg\varphi \rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)$ .

Beachte  $\neg\varphi := \varphi \rightarrow \perp$ .

- 1:  $[\varphi \rightarrow \perp$  Einführen einer Annahme
- 2:  $[\varphi \wedge \psi$  Einführen einer Annahme
- 3:  $\varphi$   $\wedge$ -Elimination mit 2
- 4:  $\perp]$   $\rightarrow$ -Elimination mit 1 und 3

## 2. TESTAT

**Aufgabe 2.1.** Gebe einen formalen Beweis für die Tautologie  $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\psi \wedge \varphi)$  an.

Lösung:

- 1:  $[\varphi \wedge \psi$  Einführen einer Annahme
- 2:  $\varphi$   $\wedge$ -Elimination mit 1
- 3:  $\psi$   $\wedge$ -Elimination mit 1
- 4:  $\psi \wedge \varphi]$   $\wedge$ -Einführung mit 2 und 3

**Aufgabe 2.2.** Gebe einen formalen Beweis für die Tautologie  $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow (\psi \wedge \varphi)))$  an.

Lösung:

- 1:  $[\varphi$  Einführen einer Annahme
- 2:  $[\psi$  Einführen einer Annahme
- 3:  $\psi \wedge \varphi]$   $\wedge$ -Einführung mit 1 und 2
- 4:  $\psi \rightarrow (\psi \wedge \varphi)]$

**Aufgabe 2.3.** Gebe einen formalen Beweis für die Tautologie  $((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$  an.

Lösung:

- |    |   |  |
|----|---|--|
| 1: | $[(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \chi)]$ | Einführen einer Annahme                |
| 2: | $\varphi \rightarrow \psi$                                    | $\wedge$ -Elimination mit 1            |
| 3: | $\psi \rightarrow \chi$                                       | $\wedge$ -Elimination mit 1            |
| 4: | $[\varphi$  | Einführen einer Annahme                |
| 5: | $\psi$  | $\rightarrow$ -Elimination mit 2 und 4 |
| 6: | $\chi]$   | $\rightarrow$ -Elimination mit 3 und 5 |
| 7: | $\varphi \rightarrow \chi]$                                   |  |