1. Tutorium 9

Hausaufgabe 22 a:

1:	$[\varphi \vee \psi$	Einführen einer Annahme
2:	$[\varphi$	Einführen einer Annahme
3:	$\psi \vee \varphi]$	$\vee$-Einführung mit 2
4:	$\varphi \to (\psi \vee \varphi)$	$\to$-Einführung mit 2 und 3
5:	$[\psi$	Einführen einer Annahme
6:	$\psi \vee \varphi]$	$\vee$-Einführung mit 5
7:	$\psi \to (\psi \vee \varphi)$	$\to$-Einführung mit 5 und 6
8:	$\psi \vee \varphi]$	Fallunterscheid mit 1,4 und 7

Hausaufgabe 22 b:

1:	$[(\varphi \vee \psi) \to \chi$	Einführen einer Annahme
2:	$[\varphi$	Einführen einer Annahme
3:	$\varphi \vee \psi$	$\vee$-Einführung mit 2
4:	$\chi]$	$\to$-Elimination mit 1 und 2
5:	$\varphi \to \chi]$	$\to$-Einführung mit 2 und 4

2. Aufgaben

Aufgabe 2.1. *Wahr oder falsch? Sei σ eine Signatur,*

- *für alle $\varphi, \psi \in Aus^\sigma$, $(\varphi \wedge \psi) \to \psi$ ist eine Tautologie.*
- *für alle $\varphi, \psi \in Aus^\sigma$, $\psi \to (\varphi \wedge \psi)$ ist eine Tautologie.*
- *für alle $\varphi \in Aus^\sigma$, $(\neg\varphi \to \bot) \to \varphi$ ist eine Tautologie.*
- *für alle $\varphi \in Aus^\sigma$, $\varphi \leftrightarrow \varphi$ ist eine Tautologie.*

Lösung: (i) Wahr.

1:	$[\varphi \wedge \psi$	Einführen einer Annahme
2:	$\psi]$	$\wedge$-Elimination

(ii) Falsch. Zum Beispiel: $\psi = \top$, $\varphi = \bot$.

(iii) Wahr.

1:	$[\neg\varphi \to \bot$	Einführen einer Annahme
2:	$\varphi]$	Widerspruchsregel

(iv) Wahr.

1:	$[\varphi$	Einführen einer Annahme
2:	$\varphi]$	Kopie von 1
3:	$\varphi \to \varphi$	$\to$-Einführung mit 1 und 2
4:	$\varphi \to \varphi$	Kopie von 3
5:	$\varphi \leftrightarrow \varphi]$	$\wedge$-Einführung mit 3 und 4

Aufgabe 2.2. *Gebe einen formalen Beweis für die Tautologie*

$$((\varphi \vee \chi) \to \psi) \to ((\varphi \to \psi) \wedge (\chi \to \psi))$$

an.

Lösung:

1:	$[(\varphi \vee \chi) \to \psi$	Einführen einer Annahme
2:	$[\varphi$	Einführen einer Annahme
3:	$\varphi \vee \chi$	$\vee$-Einführung mit 2
4:	$\psi]$	$\to$-Elimination mit 1 und 3
5:	$\varphi \to \psi$	$\to$-Einführung mit 2 und 4
6:	$[\chi$	Einführen einer Annahme
7:	$\varphi \vee \chi$	$\vee$-Einführung mit 5
8:	$\psi]$	$\to$-Elimination mit 1 und 3
9:	$\chi \to \psi$	$\to$-Einführung mit 6 und 8
10:	$(\varphi \to \psi) \wedge (\chi \to \psi)]$	$\wedge$-Einführung mit 5 und 9.

Aufgabe 2.3. *Sei σ eine Struktur mit einer Sorte s und einem zweistelligen Relationssymbol R. Gebe ein σ-Modell für folgende Aussage an:*

$$\begin{aligned}&(\forall v_0^s \forall v_1^s \quad R(v_0^s, v_1^s) \leftrightarrow R(v_1^s, v_0^s))\wedge\\&(\forall v_0^s \forall v_1^s \forall v_2^s \quad (R(v_0^s, v_1^s) \wedge R(v_1^s, v_2^s)) \to R(v_0^s, v_2^s))\wedge\\&(\exists v_0^s \neg R(v_0^s, v_0^s)).\end{aligned}$$

Lösung: Zum Beispiel: $A_s := \{0, 1\}$, $r(0, 0)$ falsch, $r(0, 1)$ falsch, $r(1, 0)$ falsch, $r(1, 1)$ wahr.