1. Aufgaben

Aufgabe 1.1. *Sei A eine $n \times n$-Matrix. $Ax = b$ habe zwei linear unabhängige Lösungen. Wie groß ist dann rang(A) höchstens?*

Aufgabe 1.2. *Wahr oder falsch?*

- *Ein Gleichungssystem mit mehr Gleichung als Unbekannten hat immer eine Lösung.*
- *Ein Gleichungssystem mit weniger Unbekannten als Gleichungen ist niemals lösbar.*
- *Ein lineares Gleichungssytem $Ax = b$ ist genau dann eindeutig lösbar, wenn dass homogene Gleichungssytem $Ax = 0$ nur die triviale Lösung hat.*

Aufgabe 1.3. *Welche Dimension hat der von den folgenden Vektoren aufgespannte Unterraum*

- $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ *im $\mathbb{R}^4$?*
- $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ -8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ *im $\mathbb{R}^6$?*
- $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$ *im $\mathbb{R}^3$?*

Aufgabe 1.4. *Ermittele die Dimension des Kerns der lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, wobei $f(x) = Ax$ und $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 6 & 10 \\ 1 & 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$. Weiter bestimme eine Basis des Kerns und bestimme die Lösungmenge der Gleichug $Ax = b$, wobei $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$.*

Aufgabe 1.5. *Bestimme die Koeffinzienten des reelen Polynoms $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $p(-1) = 2, p(1) = 1, p(-2) = 1$ und $p(2) = 2$.*

Aufgabe 1.6. *Beweise: Sei $f : V \to W$ eine linear Abbildung und $(v_1, ..., v_n)$ Basis von V. Weiter sei $(v_1, ...v_d)$ eine Basis des Kerns von f, dann ist $(f(v_{d+1}), ..., f(v_n))$ linear unabhängig in W.*

Aufgabe 1.7. *Beweise: Es gibt keine injektive lineare Abbildung von $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ und es gibt keine surjektive Abbildung von $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$.*