1. Aufgaben

Aufgabe 1.1 (Skalarprodukte)**.** (1) *Definiere die Begriffe Skalarprodukt, euklidischer Vektorraum, orthogonal, Länge und Winkel.*

(2) *Ist* $(\mathbb{R}^2, \sigma)$ *mit* $\sigma(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2$ *ein euklidischer Vektorraum?*

(3) *Berechne den Winkel zwischen* $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ *in* $(\mathbb{R}^2, \sigma)$.

(4) *Berechne das orthogonale Komplement zu* $< \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} >$.

Aufgabe 1.2 (Gram-Schmidt-Verfahren)**.** *Betrachte den* $\mathbb{R}^4$ *versehen mit dem Standard-Skalarprodukt. Bestimme eine Orthonormalbasis des von folgenden Vektoren aufgespannten Unterraumes:* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \\ 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ -1 \\ 25 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 1.3 (Lineares Ausgleichsproblem)**.** *Löse die folgenden linearen Ausgleichprobleme* $\|Ax - b\| =$ *Minimum für die folgende Matrix* A *und Vektor* b*:*
$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \\ 6 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *und* $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 1.4. *Berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren folgender Matrizen:*

(i) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Welche Matrizen können diagonalisiert werden?