1. Aufgaben

Aufgabe 1.1. *Definiere die folgenden Begriffe:*

- *Bilinearform,*
- *Skalarprodukt,*
- *Hermitsche Form und*
- *Orthogonalität.*

Aufgabe 1.2. *Wahr oder falsch?*

- *Ein Skalarprodukt ist eine Abbildung* $V \times V \to V$, *wobei* V *Vektorraum.*
- *Wenn* $<,>$ *ein Skalarprodukt auf dem* $\mathbb{R}^n$ *ist , dann gilt für alle* $x, y \in \mathbb{R}^n$*:* $< x, y >= x_1y_1 + ... + x_ny_n$.
- *Sei* V $\mathbb{R}$*-Vektorraum und* $<,>$ *ein Skalarprodukt auf* V*, dann gilt:* $< v, v >= 0 \Rightarrow v = 0_V$.

Aufgabe 1.3. *Beweise:* $< x, y >:= 4x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_2y_2$ *definiert ein Skalarprodukt auf dem* $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 1.4. *Beweise: Für komplexe Zahlen* a, b *gilt:*

- $\overline{a + b} = \overline{a} + \overline{b}$
- $\overline{ab} = \overline{a}\overline{b}$
- $a\overline{a} = (Re\ a)^2 + (Im\ a)^2 \in \mathbb{R}$

Aufgabe 1.5. *Sei* $a_1 = (4, 2, -2, 1), a_2 = (2, 2, -4, -5), a_3 = (0, 8, -2, -5), a_4 = (1, 2, 0, 1)$ *eine Basis von* $\mathbb{R}^4$. *Orthonormalisiere diese Basis.*

Aufgabe 1.6. *Betrache den Vektorraum aller in* $[0, 1]$ *stetigen reelen Funktionen. Zeige, dass* $< f, g >= \int_0^1 f(t)g(t)dt$ *ein Skalarprodukt ist.*