1. Aufgaben

Aufgabe 1.1. *Definiere die folgenden Begriffe:*

- *Länge eines Vektors in euklidischen Vektorräumen,*
- *Winkel in beliegen euklidischen Vektorräumen,*
- *Orthogonalität,*
- *orthogonales Komplement und*
- *Orthonormalbasis.*

Aufgabe 1.2. $< x, y > := 4x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_2y_2$ *ist ein Skalarprodukt auf dem* $\mathbb{R}^2$*. Berechne den Winkel zwischen* $(1, 0)$ *und* $(0, 1)$ *bzgl. diesem Skalarproduktes. Wie lang sind die beiden Vektoren bzgl. dieses Skalarproduktes? Weiterhin bestimme eine Orthonormalbasis des* $\mathbb{R}^2$ *mit diesem Skalarprodukt.*

Aufgabe 1.3. *Bestimme eine Orthonormalbasis des von folgenden Vektoren aufgespannten Untervektorraum des* $\mathbb{R}^3$*:* $(-3, -3, 3, 3), (-5, -5, 7, 7), (4, -2, 0, 6)$*. Ausserdem berechne das orthogonale Komplement dieses Vektorraumes.*

Aufgabe 1.4. *Zeige:* $< x, y > := x^T Ay$*, wobei* $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$*, ist ein Skalarprodukt auf dem* $\mathbb{R}^3$*. Orthonormalisiere die kanonische Basis des* $\mathbb{R}^3$ *bzgl. dieses Skalarproduktes. Bestimme weiter den Winkel zwischen* $(0, 4, 5)$ *und* $(1, 3, 6)$ *bzgl. dieses Skalarproduktes.*

Aufgabe 1.5. *Betrachte wir nun den komplexen Vektorraum* $\mathbb{C}^2$*. Dann definiert* $< x, y > := 4x_1\overline{y_1} - 2x_1\overline{y_2} - 2x_2\overline{y_1} + 3x_2\overline{y_2}$ *ein positiv definite Hermitische Form auf dem* $\mathbb{C}^2$*.*

Aufgabe 1.6. *Im reelen Vektorraum aller in* $[0, 1]$ *stetigen reelen Funktionen ist* $< f, g > = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ *ein Skalarprodukt. Bestimme eine Orthonormalbasis des von den Polynomen* x^0, x^1, x^2 *und* x^3 *aufgespannten Untervektorraumes.*