1. Aufgaben

Aufgabe 1.1. *Definiere die folgenden Begriffe:*

- *hermitesch,*
- $GL_n(\mathbb{R})$,
- *orthogonale Abbildung und orthogonale Matrix und*
- *ausgeartete Bilinearform.*

Aufgabe 1.2. *Man betrachte eine orthogonale Abbildung* $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. *Welche Länge hat dann* $A(e_1)$ *und* $A(e_2)$, *wobei* $e_1 = (1, 0)$ *und* $e_2 = (0, 1)$? *Wie sehen dann* $A(e_1)$ *und* $A(e_2)$ *aus? Welchen Wert hat dann* $< Ae_1, Ae_2 >$? *Wie lässt sich* $A(e_1)$ *und* $A(e_2)$ *genau darstellen?*

Aufgabe 1.3. *Beweise: Seien* V, W *euklidische Vektorräume gleicher Dimension,* $f : V \to W$ *und* $b_1, ..., b_n$ *orthogonale Basis von* V , *dann ist* $(f(b_1), ..., f(b_n))$ *orthonormale Basis von* W *genau dann, wenn* f *orthogonal ist.*

Aufgabe 1.4. *Folgere aus der voherigen Aufgabe: Jede orthogonale Abbildung zwischen gleichdimensionalen euklidischen Vektorräumen ist bijektiv.*

Aufgabe 1.5. *Beweise: Eine Matrix* $A \in Mat(n, n, \mathbb{R})$ *ist genau dann orthogonal, wenn die Spalten bzgl. des üblichen Skalarproduktes eine Orthonormalbasis sind. Weiter gilt:* A *ist genau dann orthogonal, wenn* $A^tA = E$.

Aufgabe 1.6. *Beweise: Die orthogonalen* $n \times n$*-Matrizen bilden mit der normalen Matrixmultiplikation eine Gruppe.*